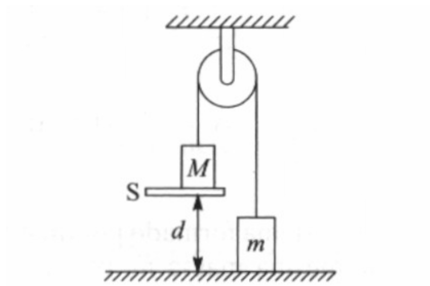
TRABALHO E ENERGIA MECÂNICA

Atenção Leia o assunto no livro-texto e nas notas de aula e reproduza os problemas resolvidos aqui. Outros são deixados para v. treinar

☐ **PROBLEMA 1** Resolva o problema 8 do Capítulo 4 a partir da conservação de energia. (Problema 4.8 - Um martelo atinge um prego com velocidade v, fazendo-o enterrar-se de uma profundidade l numa prancha de madeira. Mostre que a razão entre a força média exercida sobre o prego e o peso do martelo é igual a h/l, onde h é a altura de queda livre do martelo que o faria chegar ao solo com velocidade v. Estime a ordem de grandeza dessa razão para valores típicos de v e l.)

▸ **Solução**

☐ **PROBLEMA 2** No sistema da figura, $M = 3$ kg, $m = 1$ kg e $d = 2$ m. O suporte S é retirado num dado instante.



(a) Usando conservação de energia, ache com que velocidade M chega ao chão. (b) Verifique o resultado, calculando a aceleração do sistema pelas leis de Newton.

▸ **Solução** Considerando o nível de referência $z = 0$ no chão, temos

	Inicial		Final	
m	$z_0 = 0$	$v_0 = 0$	$z_1 = d$	$v_1 = v$
M	$Z_0 = d$	$V_0 = 0$	$Z_1 = 0$	$V_1 = V$

Logo,

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 + \frac{1}{2}MV_0^2 + MgZ_0 = Mgd$$
$$E_f = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 + \frac{1}{2}MV_1^2 + MgZ_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mgd + \frac{1}{2}MV^2$$

Devido à conservação da energia mecânica total, $E_i = E_f$, encontra-se ($v = V$)

$$Mgd = \frac{1}{2}mV^2 + mgd + \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(m+M)V^2 = (M-m)gd \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2(M-m)gd}{(m+M)}}$$

Portanto,

$$V = \sqrt{\frac{2\times(3-1)\times 9,8\times 2}{3+1}} = 4,43 \text{ m/s.}$$

Leis de Newton Como $l_1 + l_2 =$ constante $\Rightarrow a_m = -a_M = a$. Assim,

$$T - Mg = -Ma, \quad T - mg = ma$$

ou

$$mg + ma - Mg = -Ma \Rightarrow (m+M)a = (M-m)g \Rightarrow a = \frac{(M-m)g}{(m+M)}$$

Com esta aceleração e $V^2 = 2ad = 2\frac{(M-m)g}{(m+M)}d \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2(M-m)gd}{(m+M)}}$ que é a mesma encontrada anteriormente.

* * *

☐ **PROBLEMA 3** Uma particula de massa $m = 1$ kg, lançada sobre um trilho retilíneo com velocidade de 3 m/s, está sujeita a uma força $F(x) = -a - bx$, onde $a = 4$ N, $b = 1$ N/m, e x é o deslocamento, em m, a partir da posição inicial. **(a)** Em que pontos do trilho a velocidade da partícula se anula? **(b)** Faça o gráfico da velocidade da partícula entre esses pontos. **(c)** A que tipo de lei de forças corresponde $F(x)$?

▸ **Solução** Do teorema trabalho energia cinética,

$$W_{x_0 \to x} = T - T_0$$

Tomando a origem na posição de lançamento, $v_0 = 3$ m/s e e $x_0 = 0.$ Como

$$W_{x_0 \to x} = \int_0^x F(x')dx' = \int_0^x (-a - bx')dx' = -a\int_0^x dx' - b\int_0^x x'dx' = -ax - \frac{1}{2}bx^2.$$

e $T = \frac{1}{2}mv^2$ e $T_0 = \frac{1}{2}mv_0'$, encontra-se

$$-ax - \frac{1}{2}bx^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

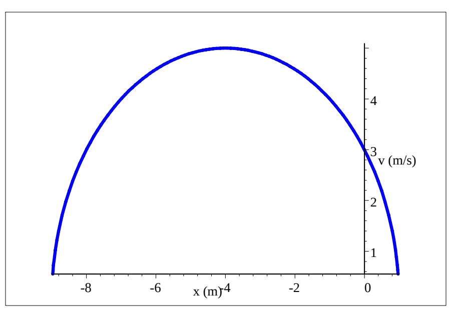
ou ($m = 1, v_0 = 3,\ a = 4,\ b = 1$)

$$-4x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{9 - 8x - x^2}.$$

(a) Logo, os pontos para os quais $v = 0,$ são obtidos pela solução da equação $9 - 8x - x^2 = 0.$ Ou seja,

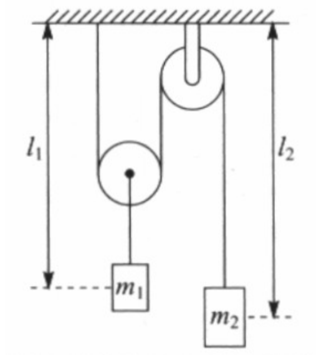
▸ $x = -9$ m e $x = 1$ m.

(b) Gráfico $v \times x$:



(c) Lei de Hooke.

☐ **PROBLEMA 4** No sistema da figura, onde as polias e os flos têm massa desprezível, $m_1 = 1$ kg e $m_2 = 2$ kg. **(a)** O sistema é solto com velocidade inicial nula quando as distâncias ao teto são l_1 e l_2. Usando conservação da energia, calcule as velocidades de m_1 e m_2 depois que m_2 desceu uma distância x_2. **(b)** Calcule a partir daí as acelerações a_1 e a_2 das duas massas. (c) Verifique os resultados usando as leis de Newton.



▸ **Solução** Vamos escolher o nível de referência $z = 0$ no teto, com o sentido positivo do eixo z para cima. Como $l_2 + 2l_1 =$ constante, $\Delta l_2 = -2\Delta l_1$. Se $\Delta l_2 = -x_2$ ($m_2 \to$ desce) $\Rightarrow \Delta l_1 = -\frac{1}{2}\Delta l_2 = \frac{1}{2}x_2$ ($m_1 \to$ sobe). Derivando a relação $l_2 + 2l_1 =$ constante, obtém-se $v_2 = -2v_1$. A energia total antes dos blocos começarem a se mover vale ($v_{10} = 0, v_{20} = 0,\ z_{10} = -l_1,\ z_{20} = -l_2$)

$$E_i = \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 + m_1 g z_{10} + \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2 + m_2 g z_{20} \Rightarrow E_i = -m_1 g l_1 - m_2 g l_2.$$

e, depois, $\left(v_1 = \frac{1}{2}v, v_2 = -v,\ z_1 = -l_1 + \frac{1}{2}x_2,\ z_2 = -l_2 - x_2\right)$

$$E_f = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + m_1 g z_1 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + m_2 g z_2 \Rightarrow E_f = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{1}{2}v\right)^2 + m_1 g\left(-l_1 + \frac{1}{2}x_2\right) + \frac{1}{2}m_2 v^2 - m_2 g(l_2 + x_2)$$

ou seja,

$$E_f = \frac{1}{8}m_1 v^2 - m_1 g l_1 + \frac{1}{2}m_1 g x_2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 - m_2 g l_2 - m_2 g x_2$$

Da conservação da energia total, $E_i = E_f$, encontra-se

$$-m_1 g l_1 - m_2 g l_2 = \frac{1}{8}m_1 v^2 - m_1 g l_1 + \frac{1}{2}m_1 g x_2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 - m_2 g l_2 - m_2 g x_2$$

$$0 = \frac{1}{8}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_1 g x_2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 - m_2 g x_2 \Rightarrow m_1 v^2 + 4m_1 g x_2 + 4m_2 v^2 - 8m_2 g x_2 = 0$$

ou

$$(m_1 + 4m_2)v^2 - (8m_2 - 4m_1)g x_2 = 0$$

de onde se obtém

$$\blacktriangleright\ v_1 = \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(8m_2 - 4m_1)\, g x_2}{(m_1 + 4m_2)}} = \sqrt{\frac{(2m_2 - m_1)\, g x_2}{(m_1 + 4m_2)}}$$

$$\blacktriangleright\ v_2 = -v = -\sqrt{\frac{(8m_2 - 4m_1)\, g x_2}{(m_1 + 4m_2)}} = -2\sqrt{\frac{(2m_2 - m_1)\, g x_2}{(m_1 + 4m_2)}}$$

Para os valores dados,

$$v_1 = \sqrt{\frac{(2 \times 2 - 1) g x_2}{1 + 4 \times 2}} = \frac{\sqrt{3 g x_2}}{3}$$

$$v_2 = -2\sqrt{\frac{(2 \times 2 - 1) g x_2}{1 + 4 \times 2}} = -\frac{2\sqrt{3 g x_2}}{3}$$

Para calculara a aceleração, usa-se Torricelli, $\left(\Delta z_1 = \frac{x_2}{2}, \Delta z_2 = -x_2\right)$

$$v_1^2 = 2a_1\Delta z_1 \Rightarrow a_1 = \frac{v_1^2}{2\Delta z_1} = \frac{\frac{3gx_2}{9}}{x_2} = \frac{1}{3}g$$

$$v_2^2 = 2a_1\Delta z_2 \Rightarrow a_2 = \frac{v_2^2}{2\Delta z_2} = \frac{\frac{12gx_2}{9}}{-2x_2} = -\frac{2}{3}g$$

Ou seja,

- $a_1 = \frac{1}{3}g \quad (\uparrow)$
- $a_2 = -\frac{2}{3}g \quad (\downarrow)$

* * *

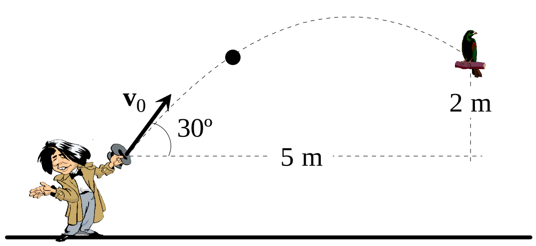
☐ **PROBLEMA 5** Um garoto quer atirar um pedregulho de massa igual a 50 g num passarinho pousado num galho 5 m a sua frente e 2 m acima do seu braço. Para isso, utiliza um estilingue em que cada elástico se estica de 1 cm para uma força aplicada de 1 N. O garoto aponta numa direção a 30^o da horizontal. De que distância deve puxar os elásticos para acertar no passarinho?

▸ **Solução** Para acertar o passarinho, sua posição deve estar sobre a trajetória. Para a origem na mão do garoto, as coordenadas do passarinho são $(5, 2)$. Assim, usando a equação da trajetória do projétil, podemos encontrar o valor de v_0 para o $\theta = 30^o$. Ou seja,

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} = x\,\mathrm{tg}\,\theta - y \Rightarrow \frac{2v_0^2\cos^2\theta}{gx^2} = \frac{1}{x\,\mathrm{tg}\,\theta - y} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{2\cos^2\theta(x\,\mathrm{tg}\,\theta - y)}}$$

Logo,

$$v_0 = \sqrt{\frac{9,8 \times 5^2}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(5 \times \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\right)}} = 13,6 \text{ m/s.}$$



Para calcular o quanto devem ser esticados os elásticos do estilingue para que a pedra atinja esta velocidade vamos usar a conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

ou seja,

$$x = \sqrt{\frac{mv^2}{k}}$$

onde o valor de k pode ser obtido da condição $F_0 = 1$ N $\Rightarrow x_0 = 0.01$ m (cada elástico), usando a lei de Hooke

$F_0 = kx_0$. Como são dois elásticos, $F = 2$ N para $x = 0,01$m. Portanto

$$k = \frac{F}{x} = \frac{2}{0,01} = 200 \text{ N/m}$$

Logo, $\left(m = 0,050 \text{ kg}\right)$

$$x = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} = \sqrt{\frac{0,05 \times 13,6^2}{200}} = 0,215 \text{ m}$$

Ou seja, cada elástico deverá ser esticado de $21,5$ cm.

* * *

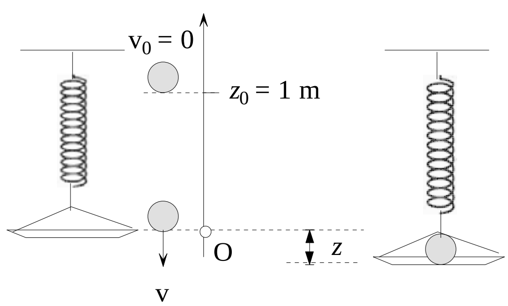
☐ **PROBLEMA 6** Uma balança de mola é calibrada de tal forma que o prato desce de 1 cm quando uma massa de $0,5$ kg está em equilíbrio sobre ele. Uma bola de $0,5$ kg de massa fresca de pão, guardada numa prateleira 1 m acima do prato da balança, escorrega da prateleira e cai sobre ele. Não levando em conta as massas do prato e da mola, de quanto desce o prato da balança?

▸ **Solução** Inicialmente vamos calcular com que velocidade a bola de massa de pão atinge o prato. Por conservação da energia mecânica para a bola, $\left(v_0 = 0,\ z_0 = 1\text{m},\ z_1 = 0,\ v_1 = v\right)$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 \Rightarrow mgz_0 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gz_0}$$

Para $z_0 = 1$

$$v = \sqrt{2 \times 9,8 \times 1} = 4,43 \text{ m/s.}$$



Ao atingir o prato com esta velocidade, a massa tem energia cinética que será transformada totalmente numa parcela de energia potencial elástica (da mola) e outra de energia potencial gravitacional, devido à conservação da energia mecânica. Assim, considerando a posição do prato como o nível de referência $z = 0$, temos pela conservação da energia

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz + \frac{1}{2}kz^2$$

A solução desta equação fornece

$$z = \frac{-mg \pm \sqrt{m^2g^2 + kmv^2}}{k}$$

O valor de k pode ser calculado pela condição $F = 0,5 \times 9,8$ N $\Rightarrow x = 0,01$ m ou

$$k = \frac{F}{x} = \frac{0,5 \times 9,8}{0,01} = 490 \text{ N/m.}$$

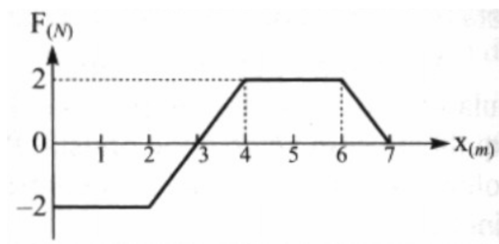
Para $m = 0,5$ kg

$$z = \frac{-0,5 \times 9,8 \pm \sqrt{(0,5 \times 9,8)^2 + 490 \times 0,5 \times 4,43^2}}{490} \Rightarrow \begin{cases} z = -15,2 \text{ cm} \\ z = 13,2 \text{ cm} \end{cases}$$

Como a posição inicial do prato é $z = 0,$ a solução deve ser negativa, ou seja, $z = -15,2$ cm é o quanto o prato abaixa.

* * *

☐ **PROBLEMA 7** Uma partícula de massa igual 2 kg desloca-se ao Ìongo de uma reta. Entre $x = 0$ e $x = 7$ m, ela está sujeita à força $F(x)$ representada no gráfico. Calcule a velocidade da partícula depois de percorrer $2,\ 3,\ 4,\ 6$ e 7 m, sabendo que sua velocidade para $x = 0$ é de 3 m/s.



▸ **Solução** Vamos usar o teorema $W - T,$ considerando $T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3^2 = 9$ J. Assim,

$$W_{0\to2} = T_{x=2} - T_0$$

Como $W =$ área do gráfico $F \times x,$ então $W_{0\to2} = -2 \times 2 = -4$ J. Mas $T_{x=2} = \frac{1}{2}mv^2(x = 2) = v_{x=2}^2.$ Logo

$$-4 = v_{x=2}^2 - 9 \Rightarrow v_{x=2} = \sqrt{9-4} \Rightarrow \blacktriangleright v_{x=2} = \sqrt{5} \text{ m/s.}$$

Da mesma forma

$$W_{0\to3} = T_{x=3} - T_0$$

Mas

$$W_{0\to3} = W_{0\to2} + W_{2\to3} = -4 - \frac{1}{2}(2 \times 1) = -5 \text{ J}$$

Logo,

$$-5 = v_{x=3}^2 - 9 \Rightarrow v_{x=3} = \sqrt{9-5} \Rightarrow \blacktriangleright v_{x=3} = 2 \text{ m/s.}$$

Para $x = 4$

$$W_{0\to4} = W_{0\to2} + W_{2\to3} + W_{3\to4} = -4 - \frac{1}{2}(2 \times 1) + \frac{1}{2}(2 \times 1) = -4 \text{ J}$$

então

$$-4 = v_{x=4}^2 - 9 \Rightarrow v_{x=4} = \sqrt{9-4} \Rightarrow \blacktriangleright v_{x=4} = \sqrt{5} \text{ m/s}$$

Para $x = 6$

$$W_{0\to6} = W_{0\to2} + W_{2\to3} + W_{3\to4} + W_{4\to6} = -4 - \frac{1}{2}(2 \times 1) + \frac{1}{2}(2 \times 1) + 2 \times 2 = 0 \text{ J}$$

então

$$0 = v_{x=6}^2 - 9 \Rightarrow v_{x=6} = \sqrt{9} \Rightarrow \blacktriangleright v_{x=6} = 3 \text{ m/s}$$

Finalmente, para $x = 7$

$$W_{0\to7} = W_{0\to2} + W_{2\to3} + W_{3\to4} + W_{4\to6} + W_{6\to7} = -4 - \frac{1}{2}(2\times1) + \frac{1}{2}(2\times1) + 2\times2 + \frac{1}{2}(2\times1) = 1 \text{ J}$$

logo,

$$1 = v_{x=7}^2 - 9 \Rightarrow v_{x=7} = \sqrt{9+1} \Rightarrow \blacktriangleright v_{x=7} = \sqrt{10} \text{ m/s}$$

* * *

☐ **PROBLEMA 8** Uma partícula move-se ao longo da direção x sob o efeito de uma força $F(x) = -kx + Kx^2$, onde $k = 200$ N/m e $K = 300$ N/m^2. **(a)** Calcule a energia potencial $U(x)$ da partícula, tomando $U(0) = 0$, e faça um gráfico de $U(x)$ para $-0,5$ m $< x < 1$ m. **(b)** Ache as posições de equilíbrio da partícula e discuta sua estabilidade. **(c)** Para que domínio de valores de x e da energia total E a partícula pode ter um movimento oscilatório? **(d)** Discuta qualitativamente a natureza do movimento da partícula nas demais regiöes do eixo dos x.

Dado: $\int_0^x x'^n dx' = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

▸ **Solução** **(a)** Por definição,

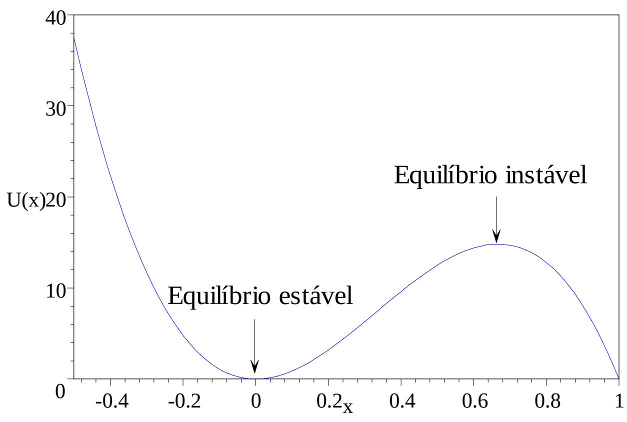
$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')dx' = -\int(-kx' + Kx'^2)dx' = k\int_{x_0}^{x} x'dx' - K\int_{x_0}^{x} x'^2dx'$$
$$= \frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2) - \frac{1}{3}K(x^3 - x_0^3)$$

Da condição $U(0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ e, portanto,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}Kx^3$$

Gráfico: $k = 200$ e $K = 300$

$$U(x) = 100x^2 - 100x^3$$



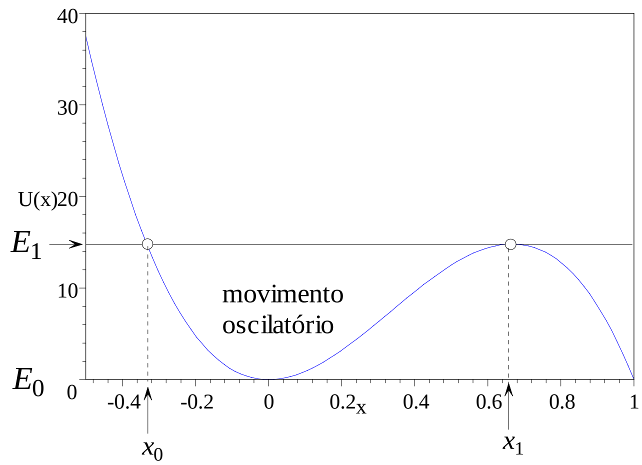
(b) As posições de equilíbrio são obtidas da equação $F(x) = 0$. Assim,

$$F(x) = -kx + Kx^2 = 0 \Rightarrow x(Kx - k) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } x = \frac{k}{K} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3} \text{ m.}$$

Do gráfico, vê-se que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio estável e $x = \frac{2}{3}$ m é um ponto de equilíbrio instável.

(c) O movimento oscilatório é um movimento limitado, portanto, só pode ocorrer para $x_0 \le x \le x_1$ correspondente às energias $E < E_1$. O valor E_1 corresponde a $U(x_1)$ onde $x_1 = \frac{2}{3}$ m. Assim

$$U\left(\frac{2}{3}\right) = 100\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 100\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 100\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 100\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3} = 100 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{400}{27}\text{J}$$



Para calcular x_0, basta fazer $U(x_0) = E_1$, ou seja,

$$100x^2 - 100x^3 = \frac{400}{27} \Rightarrow x^3 - x^2 + \frac{4}{27} = 0$$

Esta equação pode ser escrita na forma de fatores

$$\frac{1}{27}(3x+1)(3x-2)^2 = 0$$

Logo, as soluções seão

$$x = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}.$$

Portanto,

$$x_0 = -\frac{1}{3}\text{ m.}$$

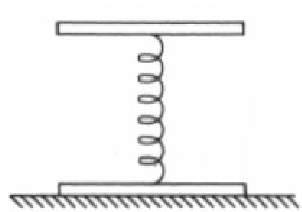
Assim, os domínios de valores de x e E são dados por:

$$-\frac{1}{3}\text{ m} < \quad x < \frac{2}{3}\text{ m}$$

$$E < \frac{400}{27}\text{ J.}$$

* * *

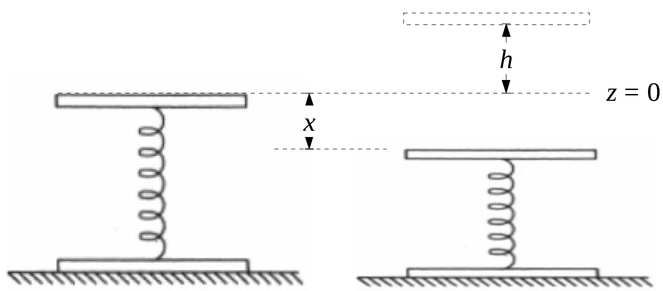
☐ **PROBLEMA 9** Um sistema formado por duas lâminas delgadas de mesma massa m, presas por uma mola de constante elástica k e massa desprezive!, encontra-se sobre uma mesa horizontal (veja a Fig.). **(a)** De que distância a mola está comprimida na posição de equilíbrio? **(b)** Comprime-se a lâmina superior, abaixando-a de uma distància adicional x a partir da posição de equilíbrio. De que distància ela subirá acima da posição de equilíbrio, supondo que a lâmina inferior permaneça em contato com a mesa? **(c)** Qual é o valor minimo de x no item (b) para que a lâmina inferior salte da mesa?



▸ **Solução** **(a)** Na posição de equilíbrio, a mola deve sustentar o peso de uma das lâminas, $P = mg$. Assim,

$$kx = mg \Rightarrow \blacktriangleright x = \frac{mg}{k}$$

(b) Nesta situação, a mola será comprimida de $2x$ em relação ao seu tamanho normal. Portanto, a energia potencial elástica da mola será



$$U = \frac{1}{2}k(2x)^2 = 2kx^2 = 2k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{2m^2g^2}{k}$$

Considerando o nível de referência $z = 0$ na posição de equilíbrio, a conservação da energia mecânica fornece

$$mgh = \frac{2m^2g^2}{k} - mgx \Rightarrow h = \frac{2mg}{k} - x = 2x - x \Rightarrow \blacktriangleright h = x$$

(c) O valor mínimo de x para que o lâmina inferior salte da mesa é aquele em que a força normal exercida pela mesa sobre o sistema se iguale ao peso do sistema. Neste caso, a força normal é igual à força necessária para comprimir a mola. Assim, como a massa da mola é desprezível, o peso do sistema corresponde ao peso das lâminas, que é $P_S = 2mg$. Então

$$kx = 2mg \Rightarrow x_{\min} = \frac{2mg}{k}$$

* * *

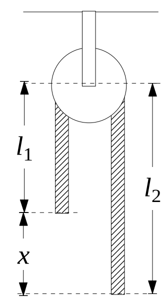
☐ **PROBLEMA 10** Um cabo uniforme, de massa M e comprimento L, está inicialmente equilibrado sobre uma pequena polia de massa desprezível, com a metade do cabo pendente de cada lado da polia. Devido a um pequeno desequilíbrio, o cabo começa a deslizar para uma de suas extremidades, com atrito desprezível. Com que velocidade o cabo está-se movendo quando a sua outra extremidade deixa a polia?

▸ **Solução** A resultante da força numa dada situação em que $l_2 - l_1 = x$ é dada pelo peso deste pedaço de cabo a mais que pende para um dos lados. Assim, considerando que a massa seja uniforme então $m(x) = \lambda x$, onde $\lambda = M/L$. Assim,

$$F(x) = \lambda g x$$

O trabalho realizado por esta força desde $x = 0$ a $x = L/2$ será

$$W_{0\to L/2} = \int_0^{L/2} \lambda g x dx = \frac{1}{2}\lambda g\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\lambda g L^2.$$



Pelo teorema $W - T$, $v_0 = 0$

$$W_{0\to L/2} = \Delta T \Rightarrow \frac{1}{8}\lambda g L^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\right)v^2 - \frac{1}{2}m(0)v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{2}v^2 \Rightarrow \frac{1}{8}\lambda g L^2 = \frac{M}{4}v^2$$

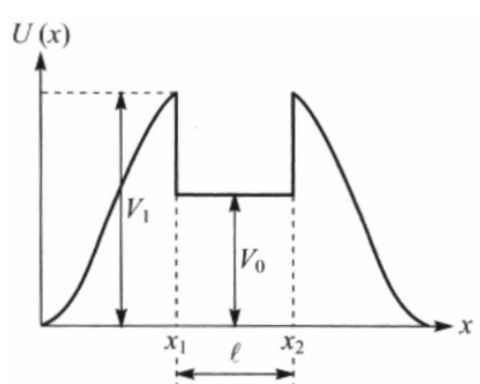
Portanto, usando $\lambda L = M$

$$v = \sqrt{\frac{\frac{1}{8}\lambda g L^2}{\frac{M}{4}}} = \sqrt{\frac{MgL}{2M}}$$

Ou seja,

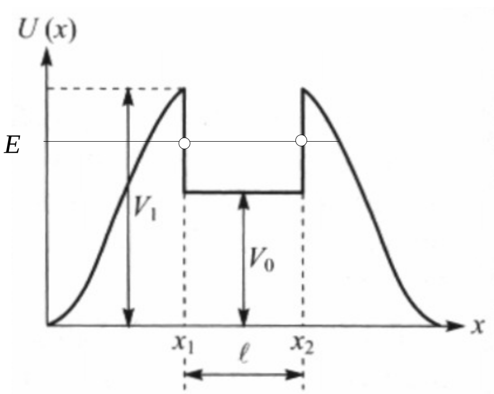
$$\blacktriangleright\ v = \sqrt{\frac{gL}{2}}$$

☐ **PROBLEMA 11** Uma partícula de massa m move-se em uma dimensão com energia potencial $U(x)$ representada pela curva da Fig. (as beiradas abruptas são idealizações de um potencial rapidamente variável). Inicialmenle, a partícula está dentro do poço de potencial (regiâo entre x_1 e x_2) com energia E tal que $V_0 < E < V_1$. Mostre que o movimento subseqüente será periódico e calcule o período.



▸ **Solução** Para valores da energia no intervalo $V_0 \leq E \leq V_1$, entre os pontos no intervalo aberto $x_1 < x < x_2$, temos da conservação da energia

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_0)}$$



Em termos de diferenciais,

$$dx = \frac{dx}{dt}dt \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_0)}\ dt$$

Integrando ambos os membros desta equação, sabendo que em $t = 0$, $x = x_0$ e em t a posição é x

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_0)}\ \int_0^t dt'$$

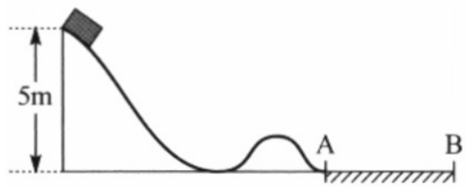
ou

$$x = x_0 \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_0)}\ t$$

ou seja, o movimento da partícula entre os pontos de retorno é um movimento retilíneo uniforme com velocidade cujo módulo vale $|v| = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_0)}$. O sinal é $+$ ou $-$ conforme a partícula esteja se movimento para a direita ou para a esquerda. Quando a partícula atinge o ponto $x = x_1$ ou o ponto $x = x_2$ (posição das paredes da barreira) esta solução não é mais válida. Neste caso $E = U(x)$ e esses pontos são pontos de inversão. Ao atingir esses pontos a partícula fica sujeita a uma força dirigida em sentido contrário ao movimento fazendo-a desacerelar, invertendo sua velocidade (da mesma forma como acontece com uma bola ao atingir uma parede). Esta força está sempre dirigida para a região de menor potencial. Por exemplo, ao atingir o ponto x_1 a força é dirigida para a direita, e no ponto x_2, para a esquerda. Para encontrar o perído do movimento, basta calcular o tempo necessário para a partícula percorrer a distância $\Delta x = 2l$. Logo,

$$2l = |v|\,\tau \Rightarrow \blacktriangleright\tau = \frac{2l}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_0)}}$$

☐ **PROBLEMA 12** Um carrinho desliza do alto de uma montanha russa de 5 m de altura, com atrito desprezível. Chegando ao ponto A, no sopé da montanha, ele é freiado pelo terreno AB coberto de areia (veja a Fig.), parando em $1,25$ s. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o carrinho e a areia?



▸ **Solução** Pela conservação da energia, vamos calcular a velocidade com que o carrinho chega ao ponto A:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{2gh}$$

A partir deste ponto, o carrinho é desacelerado, e pelo teorema $W-T$, podemos calcular o trabalho realizado pela força de atrito. Assim,

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A\to B} \Rightarrow W_{A\to B} = -\frac{1}{2}mv_A^2$$

Como o $W_{A\to B} = F_c(x_B - x_A) = F_c\Delta x$, então

$$F_c = \frac{W_{A\to B}}{\Delta x}$$

podemos calcular Δx pela informação do tempo que o carrinho leva para parar. Alem disso, a aceleração do movimento pode ser calculada, usando-se as leis de Newton,

$$F_c = ma \Rightarrow a = \frac{W_{A\to B}}{m\Delta x} = \frac{-\frac{1}{2}mv_A^2}{m\Delta x} = -\frac{v_A^2}{2\Delta x}$$

Assim, considerando um movimento uniformemente desacelerado,

$$\Delta x = v_A t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \Delta x = v_A t - \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{2\Delta x}\ t^2$$

Desta equação, pode-se calcular Δx, ou seja,

$$(\Delta x)^2 = v_A t(\Delta x) - \frac{v_A^2}{4}\ t^2 \Rightarrow (\Delta x)^2 - v_A t(\Delta x) + \frac{v_A^2}{4}\ t^2 = 0$$

Portanto,

$$\Delta x = \frac{v_A t \pm \sqrt{v_A^2 t^2 - v_A^2\ t^2}}{2} \Rightarrow \blacktriangleright \Delta x = \frac{1}{2}v_A t.$$

Com este valor de Δx, podemos agora calcular a força de atrito cinético (em módulo) dada pela expressão $F_c = ma$, onde

$$a = -\frac{v_A^2}{2\Delta x} = -\frac{v_A^2}{2\frac{1}{2}v_A t} \Rightarrow a = -\frac{v_A}{t}$$

a, portanto,

$$F_c = ma \Rightarrow |F_c| = \frac{mv_A}{t}$$

Como,

$$|F_c| = \mu_c N = \mu_c mg \Rightarrow \mu_c mg = \frac{mv_A}{t} \Rightarrow \mu_c g = \frac{v_A}{t}$$

ou

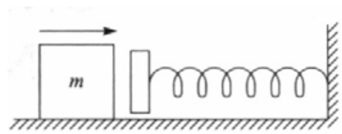
$$\blacktriangleright \mu_c = \frac{v_A}{gt} = \frac{\sqrt{2gh}}{gt} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Usando os valore dados $g = 9,8$ m/s^2, $h = 5$ m, $t = 1,25$ s

$$\mu_c = \frac{1}{1,25}\sqrt{\frac{2 \times 5}{9,8}} \Rightarrow \blacktriangleright \mu_c = 0,81$$

* * *

☐ **PROBLEMA 13** Um bloco de massa $m = 5$ kg, deslizando sobre uma mesa horizontal, com coeficientes de atrito cinético e estático $0,5$ e $0,6$, respectivamente, colide com uma mola de massa desprezível, de constante de mola $k = 250$ N/m, inicialmente na posição relaxada (veja Fig.). O bloco alinge a mola com velocidade de 1 m/s. **(a)** Qual é a deformação máxima da mola? **(b)** Que acontece depois que a mola atinge sua deformação máxima? **(c)** Que fração da energia inicial é dissipada pelo atrito nesse processo?



▸ **Solução** **(a)** A energia mecânica neste sistema não é conservada uma vez que existe forças de atrito. Mas, no cômputo das energias, a energia cinética do bloco é, na maior parte, transformada em energia potencial elástica da mola e o restante é dissipada pelo atrito. Caso não existisse o atrito, da conservação da energia mecânica teríamos

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

onde x seria a deformação sofrida pela mola. Porém, com a presença do atrito, a energia cinética sofreria uma variação devido ao trabalho realizado por esta força, dado por

$$W_{0\to x} = -F_c x = \Delta T$$

Portanto, retirando a parcela da energia cinética que foi dissipada pelo atrito (isto equivale a adicionar no membro da equação de conservação o termo de variação $\Delta T < 0$), temos

$$\frac{1}{2}mv^2 + \Delta T = \frac{1}{2}kx^2$$

ou

$$\frac{1}{2}mv^2 - F_c x = \frac{1}{2}kx^2$$

Como $F_c = \mu_c mg$, então

$$\frac{1}{2}mv^2 - \mu_c mgx = \frac{1}{2}kx^2$$

encontra-se

$$x = \frac{-\mu_c mg - \sqrt{\mu_c^2 m^2 g^2 + kmv^2}}{k} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,074 \text{ m} \\ x = -0,27 \text{ m} \end{cases}$$

Como a solução deve ser $x > 0$, então

$$\blacktriangleright x = 7,4 \text{ cm.}$$

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 14** Um pêndulo é afastado da vertical de um ângulo de $60°$ e solto em repouso. Para que ângulo com a vertical sua velocidade será a metade da velocidade máxima atingida pelo pêndulo?

▸ **Solução** Considere a figura abaixo. Da conservação da energia mecânica,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{ constante}$$

vemos a velocidade é máxima na posição da menor coordenada z. No caso da figura, esta posição corresponde ao ponto B, que é o mais baixo da trajetória da partícula. Assim, a velocidade v_B neste ponto será dada por

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A$$

Como $z_B = 0$ e $v_A = 0$ encontra-se

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgz_A \Rightarrow v_B = \sqrt{2gz_A}$$

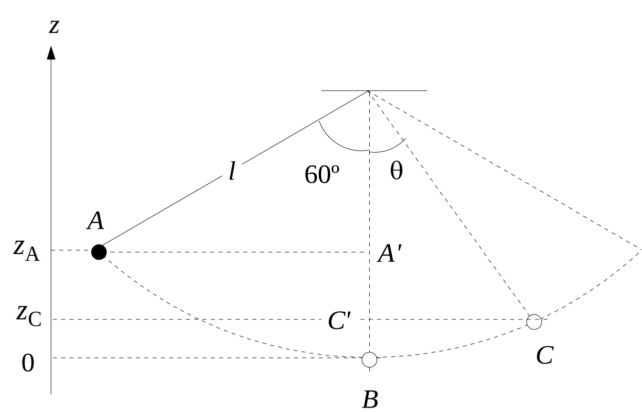
Mas, também da figura, encontra-se que

$$z_A = l - l\cos 60^\circ = \frac{l}{2}$$

Assim,

$$v_B = \sqrt{2g\frac{l}{2}} = \sqrt{gl}$$

onde l é o comprimento do fio do pêndulo.



Vamos agora admitir que o ponto C tem velocidade $v_C = \frac{1}{2}v_B$, ou seja, metada da velocidade máxima. A coordenda z_C pode ser calculada em função do ângulo θ

$$z_C = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta).$$

Aplicando a conservação da energia entre os pontos B e C, encontra-se

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgz_C$$

ou, lembrando que $z_B = 0$ e $v_C = \frac{v_B}{2}$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_B}{2}\right)^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

ou

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{8}mv_B^2 = mgl(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{3}{8}v_B^2 = gl(1-\cos\theta)$$

Como $v_B = \sqrt{gl}$

$$\frac{3}{8}gl = gl(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{3}{8} = 1-\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 1-\frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Ou seja,

$$\theta = \arccos\left(\frac{5}{8}\right) = 51,3^{\circ}$$

★ ★ ★