APLICAÇÕES DAS LEIS DE NEWTON

Atenção Leia o assunto no livro-texto e nas notas de aula e reproduza os problemas resolvidos aqui. Outros são deixados para v. treinar

☐ **PROBLEMA 1** Um astronauta, vestindo seu traje espacial, consegue pular a uma altura de 60 cm da Terra. A que altura conseguirá pular na Lua? Os raios médios da Terra e da Lua são de 6.371 km e 1.738 km, respectivamente; as densidades médias são 5,52 g/cm^3 e 3,34 g/cm^3, respectivamente.

▸ **Solução** De acordo com a lei da gravitação universal, a força que a Terra ou a Lua exercem sobre o astronauta (força-peso) pode ser escrita como

$$P_T = mg_T \text{ e } P_L = mg_L$$

onde m é a massa do astronauta e

$$g_T = \frac{GM_T}{R_T^2} \text{ e } g_L = \frac{GM_L}{R_L^2}$$

ou

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{\dfrac{GM_T}{R_T^2}}{\dfrac{GM_L}{R_L^2}} = \frac{M_T}{M_L}\frac{R_L^2}{R_T^2}$$

Sejam $\rho_T = 5,52$ g/cm^3 e $\rho_L = 3,34$ g/cm^3 as densidades da Terra e da Lua, respectivamente. Por definição a densidade de corpo homogêneo é $\rho = \frac{M}{V}$, ou seja, é a razão entre a massa e o volume do corpo. Logo,

$$M_T = \rho_T V_T \text{ e } M_L = \rho_L V_L$$

onde $V_{T(L)} = \frac{4\pi}{3}R_{T(L)}^3$ e portanto,

$$M_T = \frac{4\pi}{3}\rho_T R_T^3 \text{ e } M_L = \frac{4\pi}{3}\rho_L R_L^3$$

Assim,

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{M_T}{M_L}\frac{R_L^2}{R_T^2} \Rightarrow \frac{g_T}{g_L} = \frac{\frac{4\pi}{3}\rho_T R_T^3}{\frac{4\pi}{3}\rho_L R_L^3}\frac{R_L^2}{R_T^2} = \frac{\rho_T}{\rho_L}\frac{R_L}{R_T}$$

Substituindo os valores fornecidos, encontra-se

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{5,52}{3,34} \times \frac{6.371}{1.738} \simeq 6,1$$

Isto significa que a aceleração da gravidade na superfície da Lua é $g_L = \frac{g_T}{6,1} = \frac{9,8}{6,1} = 1,6$. Ao conseguir saltar na superfície da Terra uma altura $h_T = 0,60$ m, este astronauta usou uma força muscular que lhe permitiu imprimir uma velocidade inicial dada por

$$v^2 = v_0^2 - 2g_T y_T \Rightarrow 0 = v_0^2 - 2 \times 9,8 \times 0,6 \Rightarrow v_0 = \sqrt{11,8} = 3,4 \text{ m/s}$$

Supondo que esta força seja a mesma na superfície da Lua, então

$$v^2 = v_0^2 - 2g_L y_L \Rightarrow 0 = 11,8 - 2 \times 1,6 h_L \Rightarrow h_L = \frac{11,8}{3,2} \Rightarrow h_L = 3,7 \text{ m} \blacktriangleleft$$

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 2** Utilizando os dados do problema anterior, calcule que fração da distância Terra-Lua é preciso percorrer para que a atração gravitacional da Terra seja compensada pela da Lua.

▸ **Solução** Seja d a distância entre os raios da Terra e da Lua. Trata-se aqui de calcular a que distância x do centro da Terra (ou $d - x$ do centro da Lua) deve estar localizada uma partícula de massa m para que as forças de atração da Terra e da Lua sobre ela sejam as mesmas. Assim,

$$F_{m(T)} = F_{m(L)}$$
$$\frac{GmM_T}{x^2} = \frac{GmM_L}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{M_T}{M_L} = \frac{x^2}{(d-x)^2}$$

Usando a definição dos $M's$ em termos das densidades, encontra-se

$$\frac{\frac{4\pi}{3}\rho_T R_T^3}{\frac{4\pi}{3}\rho_L R_L^3} = \frac{x^2}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{\rho_T R_T^3}{\rho_L R_L^3} = \frac{x^2}{(d-x)^2}$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{(d-x)^2} = \frac{5,52 \times 6.371^3}{3,34 \times 1.738^3} = 81,4$$

Desta forma,

$$\frac{x}{d-x} = \sqrt{81,4} = 9$$

ou

$$x = 9(d-x) \Rightarrow 10x = 9d \Rightarrow \frac{x}{d} = \frac{9}{10} = 0,9$$

Portanto, deve-se percorrer 90% da distância entre a Terra e a Lua para que a força de atração gravitacional da Terra seja compensada pela força gravitacional da Lua.

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 3** No átomo de hidrogênio, a distância média entre o elétron e o próton é de aproximadamente 0,5 A. Calcule a razão entre as atrações coulombiana e gravitacional das duas partículas no átomo. A que distância entre o elétron e o próton sua atração coulombiana se tornaria igual à atração gravitacional existente entre eles no átomo? Compare o resultado com a distância Terra-Lua.

▸ **Solução** A massa do próton é $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg e a do elétron, $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$, sendo iguais a $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C o módulo das cargas das duas partículas. Como as forças gravitacional e elétrica entre o elétron e o próton são dadas por

$$F_{e(p)}^G = G\frac{m_e m_p}{r^2} \text{ e } F_{e(p)}^E = k\frac{e^2}{r^2}$$

então $\left(r = 0,5\ \text{Å} = 0,5 \times 10^{-10}\text{m}\right)$

$$F_{e(p)}^G = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 9,1 \times 10^{-31} \times 1,67 \times 10^{-27}}{(0,5 \times 10^{-10})^2} = 4,054 \times 10^{-47}\ \text{N}$$
$$F_{e(p)}^E = \frac{9 \times 10^9 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{(0,5 \times 10^{-10})^2} = 9,216 \times 10^{-8}\text{N}$$

Portanto,

$$\frac{F_{e(p)}^E}{F_{e(p)}^G} = \frac{9,216 \times 10^{-8}}{4,054 \times 10^{-47}} = 2,27 \times 10^{39}$$

Seja d a distância entre o elétron e o próton para a qual a força coulombiana seja igual à força gravitacional no átomo. Ou seja,

$$G\frac{m_e m_p}{r^2} = k\frac{e^2}{d^2}$$

Substituindo o lado esquerdo pelo valor já calculado, $4,054 \times 10^{-47}$ N, encontra-se

$$k\frac{e^2}{d^2} = 4,054 \times 10^{-47} \Rightarrow \frac{9 \times 10^9 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{d^2} = 4,054 \times 10^{-47}$$

de onde se obtém

$$d = \sqrt{\frac{9 \times 10^9 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{4,1 \times 10^{-47}}} = 2,38 \times 10^9 \text{ m}$$

A distância Terra-Lua vale $d_{TL} = 3,84 \times 10^8$. Portanto, para que a atração gravitacional entre o elétron e o próton num átomo de hidrogênio seja igual à atração coulombiana entre o elétron e o próton, a distância d entre as duas partículas no caso coulombiano deve ser tal que

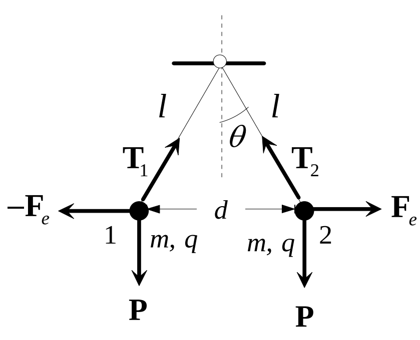
$$\frac{d}{d_{TL}} = \frac{2,38 \times 10^9}{3,84 \times 10^8} = 6,2$$

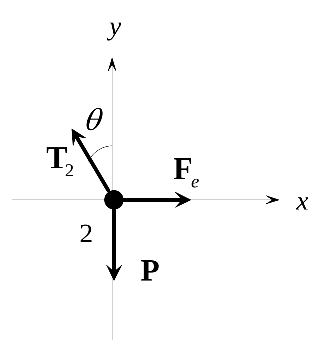
ou seja, a distância entre o elétron e o próton na atração coulombiana deve ser $d = 6,2 \times d_{TL}$ para que esta força seja igual à atração gravitacional entre essas partículas no átomo de hidrogênio.

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 4** Duas bolinhas de isopor, de 0,5 g cada uma, estão suspensas por fios de 30 cm, amarrados no mesmo ponto. Comunica-se a mesma carga elétrica a cada bolinha; em conseqüência, os fios se afastam até formar um ângulo de 60° um com o outro. Qual é o valor da carga?

▸ **Solução** A figura (a) abaixo mostra a situação descrita no problema e na (b) isolamos a partícula 2 representando todas as forças que atuam sobre ela.





Nestas condições, as partículas estão em equilíbrio e, em particular, as condições de equilíbrio aplicadas à partícula 2 são

Direção x (1) ▸ $F_e - T_2 \,\text{sen}\,\theta = 0$

Direção y (2) ▸ $T_2 \cos\theta - mg = 0$

onde F_e é a força coulombiana dada por

$$F_e = k\frac{q^2}{d^2}$$

A distância d entre as duas bolinhas pode ser calculada com a ajuda da figura (a)

$$d = 2l\,\text{sen}\,\theta$$

e q é a carga das duas partículas. Assim, com $l = 0,30$ m e $\theta = 30^o$, encontra-se

$$F_e = 9\times 10^9\frac{q^2}{(2\times 0,30\times \text{sen}\,30^o)^2} = \frac{9\times 10^9 q^2}{0,09} = 10^{11}q^2.$$

Das Eqs. (1) e (2) obtém-se,

$$T_2\,\text{sen}\,\theta = F_e$$
$$T_2\cos\theta = mg$$

ou, dividindo membro a membro,

$$\text{tg}\,\theta = \frac{F_e}{mg}$$

Assim, de $F_e = mg\ \text{tg}\,\theta$ encontra-se (para $m = 0,0005$ kg)

$$\text{tg}\,30^o = \frac{10^{11}q^2}{0,005\times 9,8} \Rightarrow q^2 = \frac{0,0005\times 9,8\times \text{tg}\,30^o}{10^{11}} = \frac{2,8\times 10^{-2}}{10^{11}} = 2,83\times 10^{-14}$$

e, finalmente,

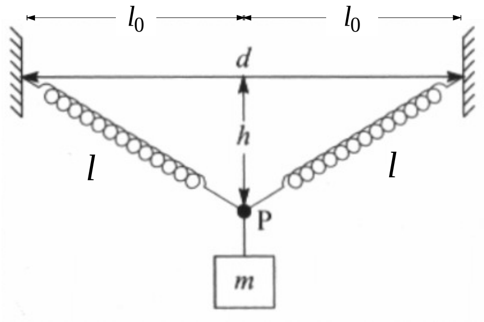
$$q = \sqrt{2,83\times 10^{-14}} = 1,68\times 10^{-7}\text{C}$$

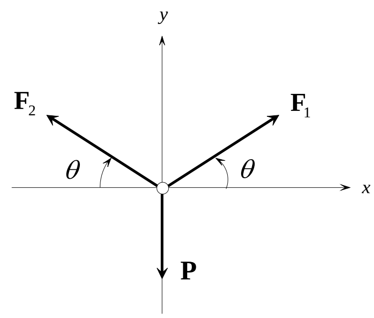
★★★

PROBLEMA 5 Leve em conta a resistência do ar, supondo-a proporcional à magnitude da velocidade. Nestas condições, um pedregulho que é lançado verticalmente para cima, a partir de uma certa altura, demora mais, menos ou o mesmo tempo para subir até a altura máxima do que para voltar até a altura do lançamento? Explique.

▸ **Solução** Considerando o sentido positivo do eixo vertical para baixo, a força resultante que atua sobre o pedregulho na subida é $\mathbf{F}_s = -(mg + b|\mathbf{v}|)\ \mathbf{j}$ e na descida, $\mathbf{F}_d = -(mg - b|\mathbf{v}|)\ \mathbf{j}$, onde $|\mathbf{v}|$ é a magnitude da velocidade instantânea. Quando as magnitudes das forças são iguais, $F_s = F_d$, como no caso onde não há resistência do ar, $b = 0$, os tempos de subida e de descida são iguais. Porém, quaisquer que sejam os valores das velocidades instantâneas, vemos que, quando $b \neq 0$, $F_s > F_d$ o que imprime ao pedregulho uma desaceleração na subida maior do que a aceleração na descida. Então, para dois percursos de mesma distância com o pedregulho partindo do repouso, o tempo de percurso será menor para o percurso em que a magnitude da aceleração é maior. Logo, podemos concluir que o tempo de descida será maior que o tempo de subida.

☐ **PROBLEMA 6** 0 sistema da figura está em equilíbrio. A distância d é de 1 m e o comprimento relaxado de cada uma das duas molas iguais é de $0,5$ m. A massa m de 1 kg faz descer o ponto P de uma distância $h = 15$ cm. A massa das molas é desprezível. Calcule a constante k das molas.





▸ **Solução** A figura da direita representa o sistema de forças que atua sobre a massa m. Usando agora a condição de equilíbrio

$$\text{Direção } x \quad (1) \blacktriangleright \quad F_1 \cos\theta = F_2 \cos\theta$$
$$\text{Direção } y \quad (2) \blacktriangleright \quad F_1 \operatorname{sen}\theta + F_2 \operatorname{sen}\theta = mg$$

A Eq. (1) diz que as magnitudes das forças aplicadas pelas duas molas são iguais, $F_1 = F_2 = F$. Levando esta informação na Eq. (2), encontra-se

$$2F \operatorname{sen}\theta = mg \Rightarrow F = \frac{mg}{2\operatorname{sen}\theta}.$$

Pela figura, podemos calcular o seno do ângulo θ, usando sua definição num triângulo retângulo:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{l} = \frac{0,15}{0,52} = 0,29$$

Logo, ($m = 1$ kg)

$$F = \frac{1 \times 9,8}{2 \times 0,29} = 16,9 \text{ N}$$

onde $F = |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$. As forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ são forças aplicadas ao corpo pelas molas devido às suas deformações (lei de Hooke) $x = \Delta l$. De fato, o comprimento relaxado de cada mola era $l_0 = 0,5$ m, passando a ser l quando a massa foi suspensa (figura da esquerda). Com o auxílio desta figura, podemos calcular o comprimento l da mola ($h = 0,15$ m)

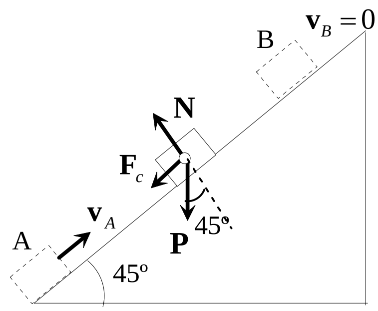
$$l^2 = l_0^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{0,5^2 + 0,15^2} = 0,522 \text{ m}.$$

Assim, $x = \Delta l = l - l_0 = 0,022$ m. Para encontrar a constante k de cada uma das molas iguais, sabemos pela lei de Hooke que $F = kx$, ou seja, $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = F = 0,022k$. Igualando esta força ao valor obtido pela condição de equilíbrio, temos que

$$0,022k = 16,9 \Rightarrow k = 768 \text{ N/m}.$$

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 7** Um bloco é lançado para cima, com velocidade de 5 m/s, sobre uma rampa de $45°$ de inclinação. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a rampa é $0,3$. (a) Qual é a distância máxima atingida pelo bloco ao longo da rampa? (b) Quanto tempo leva o bloco para subir a rampa? (c) Quanto tempo leva para descer a rampa? (d) Com que velocidade final chega ao pé da rampa?



▸ **Solução** Como não há movimento na direção perpendicular ao plano, as forças estão em equilíbrio. Logo (ver figura acima),

$$N = P\cos 45^\circ \Rightarrow N = mg\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Na direção paralela ao plano, a resultante das forças é

$$F = F_c + mg\,\text{sen}\,45^\circ$$

dirigida para baixo. Aplicando a 2ª lei de Newton, encontra-se ($F_c = \mu_c N = \mu_c mg\frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{\mu_c mg\frac{\sqrt{2}}{2} + mg\frac{\sqrt{2}}{2}}{m} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mu_c)g$$

ou seja,

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+0,3)\times 9,8 = 9,0 \text{ m/s}^2$$

dirigida para baixo paralelamente ao plano.

(a) Se o corpo é lançado para cima (a partir do ponto A) com uma velocidade $v_A = 5$ m/s, seu movimento será uniformemente desacelerado e o corpo pára no ponto B (ver figura). A distância Δx que ele percorre entre esses pontos, pode ser calculada usando a equação de Torricelli para o movimento ao longo do plano:

$$v_B^2 = v_A^2 - 2a\Delta x$$

Assim,

$$\Delta x = \frac{v_A^2}{2a} = \frac{5^2}{2\times 9} \Rightarrow \Delta x = 1,39 \text{ m.}$$

(b) O tempo que o bloco leva para subir a rampa é o mesmo que sua velocidade leva para se anular no ponto B. Então

$$v_B = v_A - at \Rightarrow t_s = \frac{v_A}{a} = \frac{5}{9} \Rightarrow t_s = 0,56 \text{ s.}$$

(c) No caso de descida, a força de atrito cinético é dirigida para cima. Então, mantendo a condição de equilíbrio na direção perpendicular ao plano, a resultanto das forças na direção paralela é

$$F = P\,\text{sen}\,45^\circ - F_c \Rightarrow F = mg\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu_c mg\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg(1-\mu_c)$$

A aceleração (paralela ao plano dirigida para baixo) é dada pela lei de Newton

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} g(1 - \mu_c) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 9,8 \times (1 - 0,3)$$

ou seja,

$$a = 4,85 \text{ m/s}^2.$$

Neste caso, o movimento é uniformemente acelerado. Tomando o eixo x na direção paralela ao plano, a distância percorrida é dada por $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. Como $v_0 = v_B = 0$ quando o bloco inicia a descida e $\Delta x = 1,39$ m

$$1,39 = \frac{1}{2} 4,85 t^2 \Rightarrow t_d = \sqrt{\frac{2 \times 1,39}{4,85}} = 0,76 \text{ s}.$$

(d) A velocidade final v ao pé da rampa é dada por

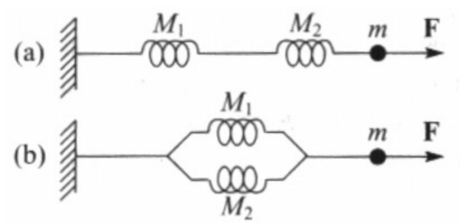
$$v = at \Rightarrow v = 4,85 \times 0,76$$

ou

$$v = 3,69 \text{ m/s}.$$

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 8** Na figura, as molas M_1 e M_2 têm massa desprezível, o mesmo comprimento relaxado l_0 e constantes de mola k_1 e k_2, respectivamente. Mostre que se pode substituir o par de molas por uma mola única equivalente de constante de mola k, e calcule k nos casos (a) e (b).



▸ **Solução** No caso (a), a condição de equilíbrio mostra que a força $\mathbf{F}$ é transmitida para ambas as molas produzindo diferentes deformações $x_1 = \frac{F}{k_1}$ e $x_2 = \frac{F}{k_2}$. A deformação total das duas molas é $x = x_1 + x_2$. Se substituirmos esta mola por uma outra que tenha a constante k, tal que sob a ação da mesma força F ela sua deformação seja x, então

$$F = kx \Rightarrow F = k\left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

é o valor de k procurado. No caso (b), a condição de equilíbrio fornece

$$F = F_1 + F_2$$

onde F_1 e F_2 são as forças aplicadas pela mola. Mas a força $\mathbf{F}$ produz a mesma deformação x em ambas as molas, de modo que

$$F = k_1 x + k_2 x$$

Substituindo as duas molas por uma única de constante k tal que sob a ação da força $\mathbf{F}$ ela se deforme do mesmo valor x, então, $F = kx$ e, portanto,

$$kx = (k_1 + k_2)\, x$$

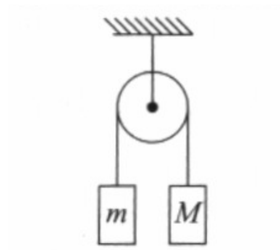
ou seja, a mola única terá de ter uma constante dada por

$$k = k_1 + k_2.$$

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 9** No sistema da figura (máquina de Atwood), mostre que a aceleração a da massa M e a tensão T da corda (desprezando as massas da corda e da polia) são dadas por

$$a = \left(\frac{M-m}{M+m}\right) g, \quad T = \left(\frac{2mM}{M+m}\right) g$$



▸ **Solução** Supondo que $M > m$, as resultantes das forças que atuam sobre as massas M e m são

$$F_M = Mg - T$$
$$F_m = T - mg$$

As acelerações das massas são iguais e, por hipótese, dirigida verticalmente para baixo no caso de M e para cima no caso de m. Assim,

$$T - mg = ma \quad (1) \blacktriangleright \quad T = ma + mg$$
$$Mg - T = Ma \quad (2) \blacktriangleright \quad Mg - Ma = T$$

Substituindo (1) em (2) obtém-se

$$Mg - Ma = mg + ma$$

ou

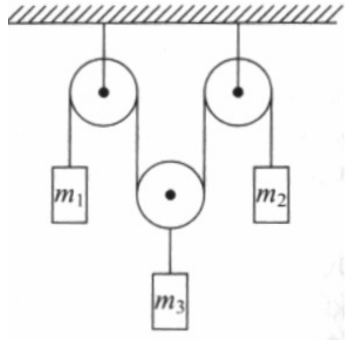
$$(M+m)a = (M-m)g \quad \blacktriangleright a = \left(\frac{M-m}{M+m}\right) g$$

Substituindo este resultado em (1), encontra-se a tensão do fio

$$T = ma + mg \Rightarrow T = m\left(\frac{M-m}{M+m}\right) g + mg$$
$$T = mg\left(\frac{M-m}{M+m} + 1\right) \Rightarrow T = mg\left(\frac{M-m+M+m}{M+m}\right) \quad \blacktriangleright T = \left(\frac{2mM}{M+m}\right) g$$

★ ★ ★

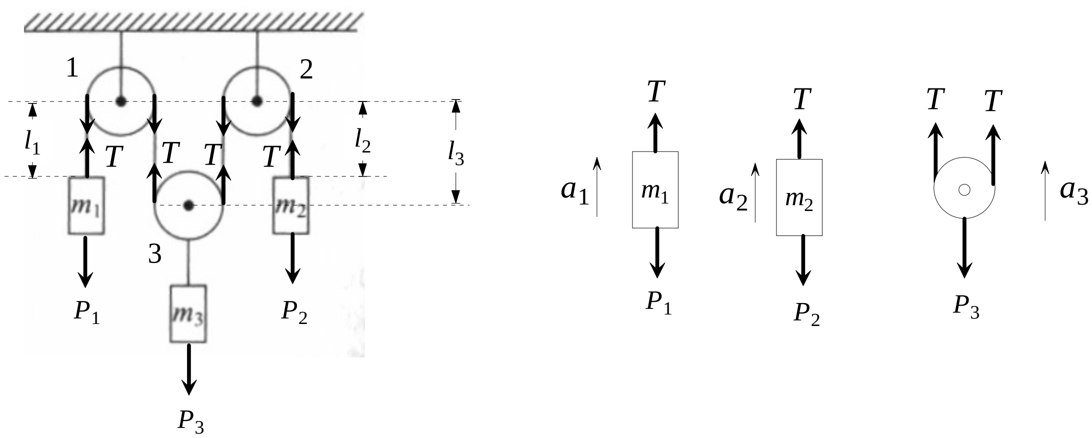
☐ **PROBLEMA 10** No sistema da figura, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 3$ kg e $m_3 = 2$ kg, e as massas das polias e das cordas são desprezíveis. Calcule as acelerações a_1, a_2 e a_3 das massas m_1, m_2 e m_3 a tensão T da corda.



▸ **Solução** Seja a_1, a_2 e a_3 as acelerações das massa m_1, m_2 e m_2 respectivamente, tomadas positivamente quando dirigidas para cima. Uma vez que as massas das roldanas e da corda são desprezíveis, a tensão T da corda é única. Assim, a equação de movimento para cada uma dessas massas é (ver figura abaixo)

$$m_1 \quad (1) \blacktriangleright \quad T - m_1 g = m_1 a_1$$
$$m_2 \quad (2) \blacktriangleright \quad T - m_2 g = m_2 a_2$$
$$m_3 \quad (3) \blacktriangleright \quad 2T - m_3 g = m_3 a_3$$

As partes móveis do sistema são: massa m_1, massa m_2 e o sistema formado pela polia 3 e a massa m_3, que se movem solidariamente (ver figura abaixo).



Da condição de que o comprimento do fio é constante, dada pela expressão

$$l_1 + l_2 + 2l_3 = \text{ constante}$$

obtém-se que

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + 2\Delta l_3 = 0$$

o que implica em $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$, ou

$$(4) \blacktriangleright \quad a_3 = -\frac{1}{2}(a_1 + a_2) \ .$$

Agora vamos resolver o sistema de quatro equações a quatro incógnitas (T, a_1, a_2, a_3 e a_4). De (1), encontra-se

$$T = m_1 a_1 + m_1 g$$

Substituindo em (2) e (3) e a (4) em (3), obtém-se

$$m_1 a_1 + m_1 g - m_2 g = m_2 a_2$$
$$2(m_1 a_1 + m_1 g) - m_3 g = -\frac{1}{2} m_3 (a_1 + a_2)$$

ou seja,

$$m_1 a_1 - m_2 a_2 = (m_2 - m_1) g$$
$$(4m_1 + m_3)\, a_1 + m_3 a_2 = (2m_3 - 4m_1) g$$

Isolando a_1 na primeira equação,

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1} a_2 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1}\right) g$$

e substituindo na segunda, temos

$$(4m_1 + m_3)\left[\frac{m_2}{m_1} a_2 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1}\right) g\right] + m_3 a_2 = (2m_3 - 4m_1) g$$

ou

$$(4m_1 + m_3)\frac{m_2}{m_1} a_2 + m_3 a_2 = -(4m_1 + m_3)\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1}\right) g + (2m_3 - 4m_1) g$$
$$\left[(4m_1 + m_3)\frac{m_2}{m_1} + m_3\right] a_2 = \left[-(4m_1 + m_3)\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1}\right) + (2m_3 - 4m_1)\right] g$$
$$\left[\frac{(4m_1 + m_3)\, m_2 + m_1 m_3}{m_1}\right] a_2 = \left[\frac{-(4m_1 + m_3)(m_2 - m_1) + m_1(2m_3 - 4m_1)}{m_1}\right] g$$
$$a_2 = \left[\frac{4m_1^2 + m_1 m_3 - 4m_1 m_2 - m_2 m_3 - 4m_1^2 + 2m_1 m_3}{(4m_1 + m_3)\, m_2 + m_1 m_3}\right] g$$
$$\blacktriangleright\ a_2 = \left(\frac{3m_1 m_3 - 4m_1 m_2 - m_2 m_3}{4m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}\right) g$$

Como $a_1 = \frac{m_2}{m_1} a_2 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1}\right) g$

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{3m_1 m_3 - 4m_1 m_2 - m_2 m_3}{4m_1 m_2 + m_3 m_2 + m_1 m_3}\right) g + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1}\right) g$$
$$a_1 = \frac{m_2(3m_1 m_3 - 4m_1 m_2 - m_2 m_3) g + (m_2 - m_1)(4m_1 m_2 + m_3 m_2 + m_1 m_3)\, g}{m_1\left[(4m_1 + m_3)\, m_2 + m_1 m_3\right]}$$
$$\blacktriangleright\ a_1 = \left(\frac{3m_2 m_3 - 4m_1 m_2 - m_1 m_3}{4m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}\right) g$$

Finalmente, como $a_3 = -\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, então

$$a_3 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3m_2 m_3 - 4m_1 m_2 - m_1 m_3}{4m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}\right) g + \left(\frac{3m_1 m_3 - 4m_1 m_2 - m_2 m_3}{4m_1 m_2 + m_3 m_2 + m_1 m_3}\right) g\right]$$
$$\blacktriangleright\ a_3 = \left(\frac{4m_1 m_2 - m_1 m_3 - m_2 m_3}{4m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}\right) g$$

Ou seja, as acelerações são:

$$\blacktriangleright\ a_1 = \left(\frac{3m_2m_3 - 4m_1m_2 - m_1m_3}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}\right) g$$

$$\blacktriangleright\ a_2 = \left(\frac{3m_1m_3 - 4m_1m_2 - m_2m_3}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}\right) g$$

$$\blacktriangleright\ a_3 = \left(\frac{4m_1m_2 - m_1m_3 - m_2m_3}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}\right) g$$

Cálculo numérico Substituindo os valores $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 3$ kg e $m_3 = 2$ kg, encontra-se

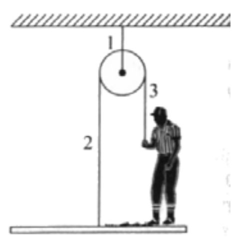
$$a_1 = \left(\frac{3\times3\times2 - 4\times1\times3 - 1\times2}{4\times1\times3 + 1\times2 + 3\times2}\right) g \;\Rightarrow\; \blacktriangleright a_1 = \frac{1}{5} g\ (\uparrow)$$
$$a_2 = \left(\frac{3\times1\times2 - 4\times1\times3 - 3\times2}{4\times1\times3 + 1\times2 + 3\times2}\right) g \;\Rightarrow\; \blacktriangleright a_2 = -\frac{3}{5} g\ (\downarrow)$$
$$a_3 = \left(\frac{4\times1\times3 - 1\times2 - 3\times2}{4\times1\times3 + 1\times2 + 3\times2}\right) g \;\Rightarrow\; \blacktriangleright a_3 = \frac{1}{5} g\ (\uparrow)$$

Para calcular a tensão na corda, usa-se $T = m_1a_1 + m_1g$. Logo

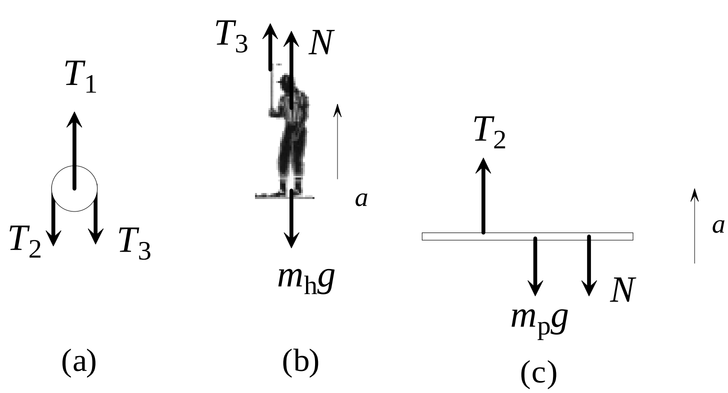
$$T = 1 \times \frac{1}{5}g + 1\times g = \frac{6}{5}g$$

★★★

☐ **PROBLEMA 11** Um pintor está sobre uma plataforma suspensa de uma polia (Figura). Puxando a corda em 3, ele faz a plataforma subir com aceleração $\frac{g}{4}$. A massa do pintor é de 80 kg e a da plataforma é de 40 kg. Calcule as tensões nas cordas 1,2 e 3 e a força exercida pelo pintor sobre a plataforma.



▸ **Solução** A figura abaixo mostra as partes isoladas do sistema e as forças que atuam sobre cada uma.



O sistema na figura (a) está em equilíbrio, logo

$$T_1 - T_2 - T_3 = 0$$
$$T_3 + N - m_h g = m_h a$$
$$T_2 - N - m_p g = m_p a$$

Como a massa da corda e da roldana é desprezível, $T_2 = T_3$. Assim

$$(1) \quad \blacktriangleright \quad T_1 = 2T_2$$
$$(2) \quad \blacktriangleright \quad T_2 + N = m_h(g+a)$$
$$(3) \quad \blacktriangleright \quad T_2 - N = m_p(g+a)$$

Somando e subtraindo (2) e (3) obtém-se

$$2T_2 = (m_h + m_p)(g+a)$$
$$2N = (m_h - m_p)(g+a)$$

ou

$$T_2 = \frac{1}{2}(m_h + m_p)(g+a)$$
$$N = \frac{1}{2}(m_h - m_p)(g+a)$$

Usando os valores dados no problema, $a = \frac{g}{4}$, $m_h = 80$ kg e $m_p = 40$ kg, encontra-se

$$T_2 = \frac{1}{2}(80+40)\left(g + \frac{g}{4}\right) = \frac{1}{2}(80+40) \times \frac{5}{4} \times 9,8 = 735 \text{ N}$$

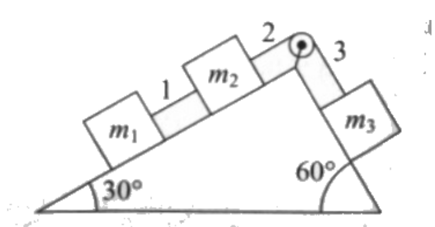
$$N = \frac{1}{2}(80-40)\left(g + \frac{g}{4}\right) = \frac{1}{2}(80-40) \times \frac{5}{4} \times 9,8 = 245 \text{ N}$$

De (1), obtém-se

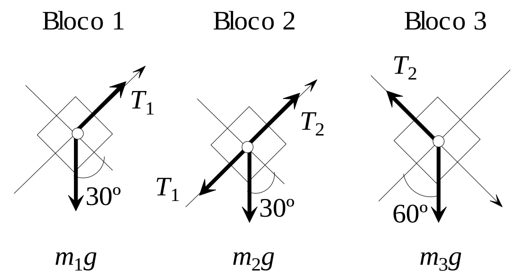
$$T_1 = 2T_2 = 2 \times 735 = 1470 \text{ N}$$

★★★

☐ **PROBLEMA 12** No sistema da figura, $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 40$ kg e $m_3 = 60$ kg. Desprezando as massas das polias e dos fios e o atrito, calcule a aceleração do sistema e as tensões nos fios 1, 2 e 3.



▸ **Solução** A figura abaixo mostra os blocos isolados com as forças que atuam sobre cada um. Devido à massa desprezível da corda e da polia, as tensões T_2 e T_3 são iguais. Vamos adotar o sentido positivo da aceleração aquele que corresponde à descida do corpo de massa m_3.



Desta forma, as equações de movimento de cada um é dada por

Bloco 1 (1) ▸ $T_1 - m_1 g \operatorname{sen} 30^\circ = m_1 a$
Bloco 2 (2) ▸ $T_2 - T_1 - m_2 g \operatorname{sen} 30^\circ = m_2 a$
Bloco 3 (3) ▸ $m_3 g \operatorname{sen} 60^\circ - T_2 = m_3 a$

onde consideramos todos os blocos se deslocando com a mesma aceleração a. Resolvendo este sistema de equações

$$T_1 = m_1 g \operatorname{sen} 30^\circ + m_1 a \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} m_1 g + m_1 a$$
$$T_2 = T_1 + m_2 g \operatorname{sen} 30^\circ + m_2 a \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} m_1 g + m_1 a + \frac{1}{2} m_2 g + m_2 a \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g + (m_1 + m_2)\, a$$
$$m_3 a = m_3 g \operatorname{sen} 60^\circ - T_2 \Rightarrow m_3 a = \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g - \left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2) g + (m_1 + m_2)\, a \right]$$

A útlima equação permite-nos obter a aceleração:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\, a = \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 g - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\, m_3 - m_1 - m_2\right) g$$

ou seja,

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}\, m_3 - m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\right) g$$

Usando os valores $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 40$ kg e $m_3 = 60$ kg encontra-se

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3} \times 60 - 40 - 20}{20 + 40 + 60}\right) \times 9,8 \Rightarrow \blacktriangleright a = 1,8 \text{ m/s}^2.$$

As tensões nas cordas são: Em 1,

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 g + m_1 a = 20 \times \left(\frac{9,8}{2} + 1,8\right) \Rightarrow \blacktriangleright T_1 = 134 \text{ N}$$

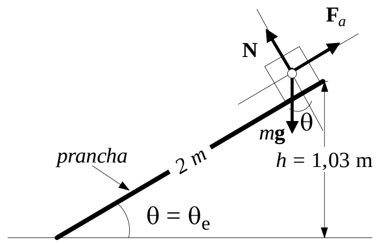
e em 2 e 3,

$$T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g + (m_1 + m_2)\, a = \left(\frac{9,8}{2} + 1,8\right) \times (20 + 40) \Rightarrow \blacktriangleright T_2 = T_3 = 402 \text{ N}.$$

★★★

☐ **PROBLEMA 13** Um bloco está numa extremidade de uma prancha de 2 m de comprimento. Erguendo-se lentamente essa extremidade, o bloco começa a escorregar quando ela está a 1,03 m de altura, e então leva 2,2 s para deslizar até a outra extremidade, que permaneceu no chão. Qual é o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a prancha? Qual é o coeficiente de atrito cinético?

▸ **Solução** Na situação em que o bloco começa a deslizar para $h = 1,03$ m implica em $\theta = \theta_e$ conforme mostra a figura abaixo.



Como vimos em classe, nesta condição o coeficiente de atrito estático vale

$$\mu_e = \mathrm{tg}\,\theta_e$$

onde (ver figura)

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}\,\theta_e &= \frac{1,03}{2} = 0,515 \\
\cos\theta_e &= \sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta_e} = \sqrt{1-0,515^2} = 0,857 \\
\mathrm{tg}\,\theta_e &= \frac{\mathrm{sen}\,\theta_e}{\cos\theta_e} = \frac{0,515}{0,857} = 0,6
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu_e = 0,6.$$

Coeficiente de atrito cinético O bloco gasta $2,2$ s para percorrer 2 m ao longo do plano. Logo, como o bloco parte do repouso, sua aceleração pode ser calculada através da expressão ($v_0 = 0$)

$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2\times 2}{2,2^2} = 0,83 \text{ m/s}^2$$

Para calcular o coeficiente de atrito cinético, vamos usar a equação de movimento ao longo do plano, com $a = 0,83$ m/s^2. Ou seja (ver figura)

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta_e - F_c = ma$$

Mas, $F_c = \mu_c N$ e $N = mg\cos\theta_e$ e assim,

$$F_c = \mu_c mg\cos\theta_e$$

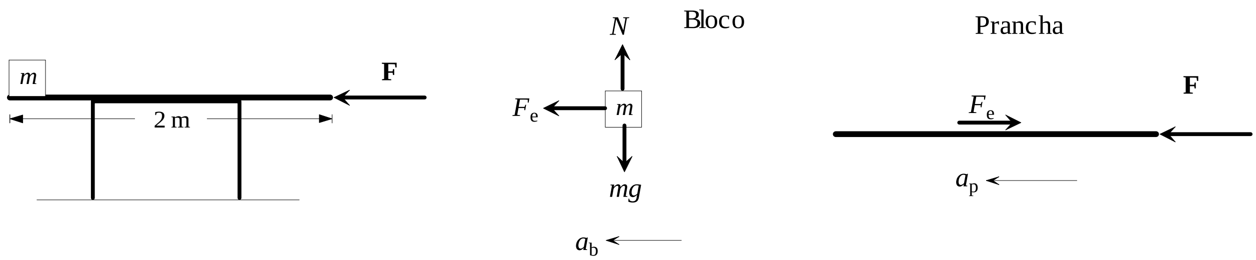
Logo,

$$\begin{aligned}
mg\,\mathrm{sen}\,\theta_e - F_c = ma &\Rightarrow mg\,\mathrm{sen}\,\theta_e - \mu_c mg\cos\theta_e = ma \\
\mu_c &= \frac{g\,\mathrm{sen}\,\theta_e - a}{g\cos\theta_e} \\
\mu_c &= \frac{9,8\times 0,515 - 0,83}{9,8\times 0,857} \Rightarrow \blacktriangleright \mu_e = 0,5.
\end{aligned}$$

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 14** Um bloquinho de massa igual a 100 g encontra-se numa extremidade de uma prancha de 2 m de comprimento e massa 0,5 kg. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloquinho e a prancha são, respectivamente, $0,4$ e $0,35$. A prancha está sobre uma mesa horizontal e lisa (atrito desprezível). Com que força máxima podemos empurrar a outra extremidade da prancha para que o bloquinho não deslize sobre ela? Se a empurrarmos com urna força de 3 N, depois de quanto tempo o bloquinho cairá da prancha?

▸ **Solução** A força aplicada à prancha é transmitida ao bloquinho através da força de contato tangencial (força de atrito estático). Para que o bloquinho não deslize é necessário que sua aceleração a_b seja igual à aceleração impressa à prancha pela força $F = F_{\text{máx}}$.



Da figura acima, obtém-se

Bloco (1) ▸ $F_a = m_b a_b$

Prancha (2) ▸ $F - F_a = m_p a_p$

Bloco sem deslizar Para que o bloco não deslize, $a_b = a_p = a$, o que corresponde a $F = F_{\max}$. Assim, nesta condição podemos escrever $(F_a = F_e)$

Bloco (3) ▸ $F_e = m_b a$

Prancha (4) ▸ $F_{\max} - F_e = m_p a$

Como $F_e = \mu_e N = \mu_e mg$, então de (3) encontra-se

$$\mu_e m_b g = m_b a \Rightarrow a = \mu_e g = 0,4 \times 9,8 \Rightarrow \blacktriangleright a = 3,92 \text{ m/s}^2$$

Substituindo na (4),

$$F_{\max} = (m_b + m_p)a = (0,1 + 0,5) \times 3,92 \Rightarrow \blacktriangleright F_{\max} = 2,35 \text{ N}$$

Bloco deslizando Para $F = 3$ N $> F_{\max}$ o bloco irá deslizar, uma vez que sua aceleração é menor do que a da prancha. De fato, a aceleração do bloco agora deve ser calculada de (1) com $F_a = F_c$ e assim,

$$F_c = m_b a_b$$

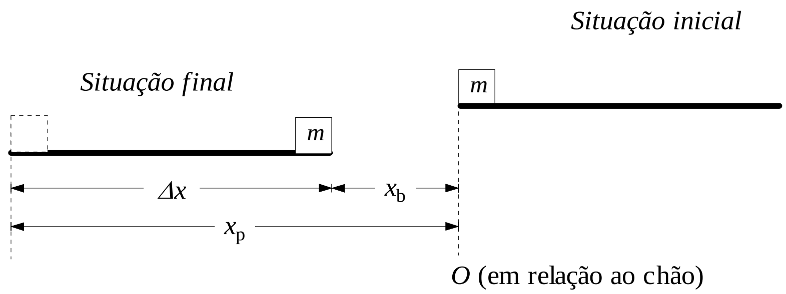
Como $F_c = \mu_c m_b g$, então

$$\mu_c m_b g = m_b a_b \Rightarrow a_b = \mu_c g = 0,35 \times 9,8 \Rightarrow \blacktriangleright a_b = 3,43 \text{ m/s}^2.$$

Para a prancha, devemos usar a (2) com $F_a = F_c$:

$$F - F_c = m_p a_p \Rightarrow a_p = \frac{F - \mu_c m_b g}{m_p} \Rightarrow a_p = \frac{3 - 0,35 \times 0,1 \times 9,8}{0,5} \Rightarrow \blacktriangleright a_p = 5,31 \text{ m/s}^2.$$

No mesmo intervalo de tempo, a distância percorrida pela prancha é maior do que a distância percorrida pelo bloco, medida em relação chão. Assim, quando a diferença entre essas distância for igual ao comprimento da prancha, isto é, quando $\Delta x = 2$ m (ver figura abaixo), o bloquinho cairá da prancha.



Mas, em relação ao chão, e partindo do repouso, a prancha percorre uma distância

$$x_p = \frac{1}{2}a_p t^2$$

enquanto que o bloquinho,

$$x_b = \frac{1}{2}a_b t^2$$

Logo, como $\Delta x = x_p - x_b = 2$ m (ver figura),

$$\frac{1}{2}a_p t^2 - \frac{1}{2}a_b t^2 = \Delta x$$

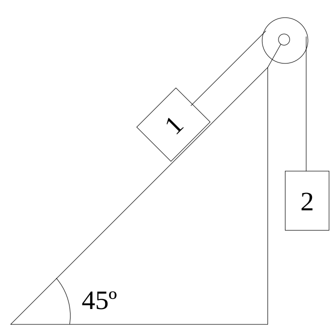
$$(a_p - a_b)t^2 = 2\Delta x \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\Delta x}{a_p - a_b}}$$

Portanto,

$$t = \sqrt{\frac{2\times 2}{5,31 - 3,43}} \Rightarrow \blacktriangleright t = 1,46 \text{ s}$$

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 15** No sistema da figura, o bloco 1 tem massa de 10 kg e seu coeficiente de atrito estático com o plano inclinado é $0,5$. Entre que valores mínimo e máximo pode variar a massa m do bloco 2 para que o sistema permaneça em equilíbrio?



▸ **Solução** A condição de equilíbrio do sistema, de acordo com a tendência de movimento, é dado por (ver figura abaixo)

m_2 mínimo ▸ $m_1 g \,\text{sen}\, 45^\circ = m_2 g + F_e$

m_2 máximo ▸ $m_2 g = m_1 g \,\text{sen}\, 45^\circ + F_e$

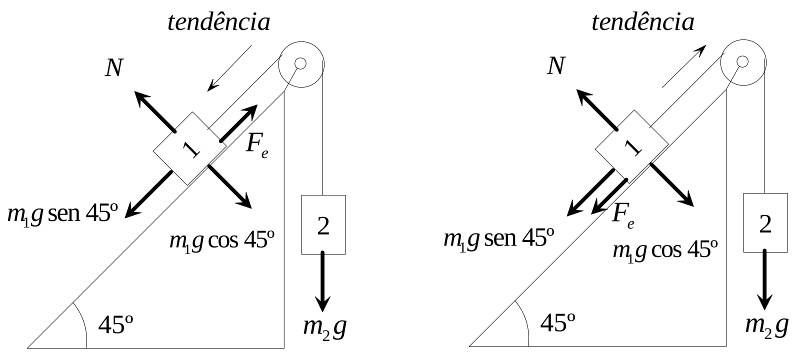
▸ $N = m_1 g \cos 45^\circ$

Como $F_e = \mu_e N = \mu_e m_1 g \cos 45^\circ$ temos, no caso de valor mínimo

$$m_{2\min} g = m_1 g \operatorname{sen} 45^\circ - F_e \Rightarrow m_{2\min} = m_1 \operatorname{sen} 45^\circ - \mu_e m_1 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} m_1 (1 - \mu_2)$$

e de valor máximo

$$m_{2\max} g = m_1 g \operatorname{sen} 45^\circ + F_e \Rightarrow m_{2\max} = m_1 \operatorname{sen} 45^\circ + \mu_e m_1 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} m_1 (1 + \mu_2)$$



m_2 mínimo *m_2 máximo*

Substituindo os valores $\left(m_1 = 10 \text{ kg}, \mu_e = 0,5\right)$, encontra-se

$$m_{2\min} = \frac{\sqrt{2}}{2} m_1 (1 - \mu_2) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times 10 \times (1 - 0,5) \Rightarrow \blacktriangleright m_{2\min} = 3,54 \text{ kg}$$

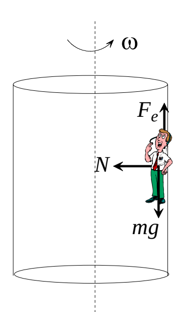
$$m_{2\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} m_1 (1 + \mu_2) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times 10 \times (1 + 0,5) \Rightarrow \blacktriangleright m_{2\max} = 10,6 \text{ kg}$$

Portanto, para que o sistema permaneça em equilíbrio, a massa m_2 deve estar no intervalo: $3,54$ kg $< m_2 < 10,6$ kg.

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 16** O coeficiente de atrito estático entre as roupas de uma pessoa e a parede cilíndrica de uma centrífuga de parque de diversões de 2 m de raio é $0,5$. Qual é a velocidade angular mínima (em rotações por minuto) da centrífuga para que a pessoa permaneça coloda à parede, suspensa acima do chão?

▸ **Solução** As forças que atuam sobre a pessoa são: a força-peso, a normal e a força de atrito. A normal N, aplicada pela parede cilíndrica, é a força que mantém a pessoa em movimento circular (atua como força centrípeta); a força de atrito aparece quando a pessoa tende a cair devido à ação da força-peso.



Logo,

$$N = m\omega^2 R$$

onde $R = 2$ m é o raio da centrífuga. Para que a pessoa permaneça colada na parede é necessário que seu peso se iguale à força de atrito. Assim,

$$mg = F_e = \mu_e N \Rightarrow mg = \mu_e m\omega^2 R$$

ou,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\mu_e R}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,5 \times 2}} \Rightarrow \blacktriangleright\ \omega = 3,13 \text{ rad/s.}$$

Mas, como $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ então $\nu = \dfrac{3,13}{2\pi} \Rightarrow \nu = 0.498$ Hz $= 0.498$ rps. Como 1 rps $= 60$ rpm, então

$$\nu = 0,498 \times 60 = 29,9 \text{ rpm.}$$

★★★

☐ **PROBLEMA 17** Uma curva semicircular horizontal numa estrada tem 30 m de raio. Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o asfalto é $0,6$, qual é a velocidade máxima que um carro pode fazer a curva sem derrapar?

▸ **Solução** A força de atrito tem de atuar com a força centrípeta para manter o carro na curva. Desta forma, a velocidade máxima com que o carro faz a curva sem derrapar é dada por

$$\mu_e N = \frac{m v_{\max}^2}{R} \Rightarrow \frac{m v_{\max}^2}{R} = \mu_e m g$$

ou

$$v_{\max} = \sqrt{\mu_e g R} = \sqrt{0,6 \times 9,8 \times 30} \Rightarrow v_{\max} = 13,28 \text{ m/s } \blacktriangleright\ v_{\max} = 13,28 \times 3,6 = 47,8.\text{km/h.}$$

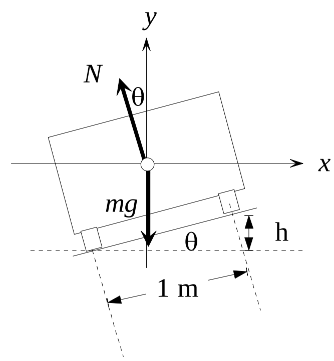
☐ **PROBLEMA 18** Um trem atravessa uma curva de raio de curvatura igual a 100 m a 30 km/h. A distância entre os trilhos é de 1 m. De que altura é preciso levantar o trilho externo para minimizar a pressào que o trem exerce sobre ele ao passar pela curva?

▸ **Solução** A figura abaixo mostra a situação em que o trem atravessa a curva. Sabe-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{h}{1} = h \\ \cos\theta &= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1 - h^2} \end{aligned}$$

onde h deve ser medido em metros. As forças que atuam sobre o trem têm as seguintes componentes

$$\begin{aligned} &\text{Direção } x \ \blacktriangleright\ R_x = N \operatorname{sen}\theta \\ &\text{Direção } y \ \blacktriangleright\ R_y = N\cos\theta - mg \end{aligned}$$



A resultante na direção x mantém o trem na curva e faz o papel da força centrípeta: $R_x = ma_c$. Assim,

$$R_x = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N \operatorname{sen}\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$R_y = 0 \Rightarrow N\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Logo,

$$\frac{mg}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{gR}$$

Mas,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

então

$$\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = \frac{v^2}{gR} \Rightarrow \frac{h^2}{1-h^2} = \frac{v^4}{g^2R^2}$$

ou

$$h^2 + \frac{v^4}{g^2R^2}h^2 = \frac{v^4}{g^2R^2} \Rightarrow h^2 = \frac{\frac{v^4}{g^2R^2}}{\left(1 + \frac{v^4}{g^2R^2}\right)}$$

ou ainda

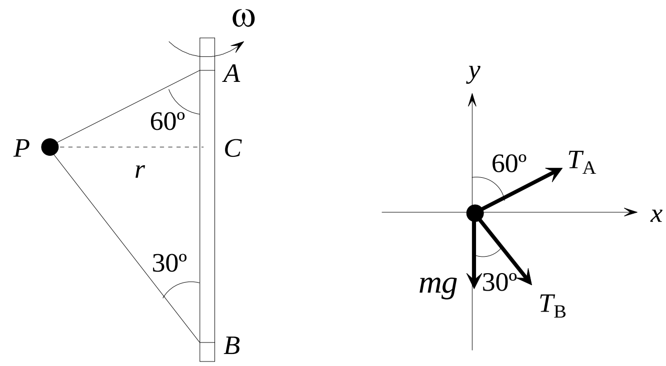
$$h = \frac{v^2}{gR\sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2R^2}}} = \frac{v^2}{\sqrt{v^4 + g^2R^2}}$$

Substituindo os valores $R = 100$ m e $v = 30$ km/h $= 8,33$ m/s:

$$h = \frac{8,3^2}{\sqrt{8,3^4 + 9,8^2 \times 100^2}} = 0,071 \text{ m} \Rightarrow \blacktriangleright h = 7,1 \text{ cm}$$

★ ★ ★

☐ **PROBLEMA 19** No sistema da figura, a bolinha de massa m está amarrada por fios de massa desprezível ao eixo vertical AB e gira com velocidade angular ω em torno desse eixo. A distância AB vale l. Calcule as tensões nos fios superior e inferior. Para que valor de ω o fio inferior ficaria frouxo?



(a) (b)

▸ **Solução** A figura (b) mostra as forças que atuam sobre a partícula de massa m. A direção x corresponde à direção que passa pelo centro do círculo descrito pela bolinha na situação indicada na figura. Para manter a bolinha em movimento circular, a resultante das forças deve estar nessa direção, com R_x fazendo o papel da força centrípetra. Assim

$$\text{Direção } x \;\blacktriangleright\; R_x = T_A \operatorname{sen} 60^\circ + T_B \operatorname{sen} 30^\circ$$
$$\text{Direção } y \;\blacktriangleright\; R_y = T_A \cos 60^\circ - T_B \cos 30^\circ - mg$$

Logo,

$$R_y = 0 \quad (1) \blacktriangleright \quad T_A \cos 60^\circ - T_B \cos 30^\circ - mg = 0$$
$$R_x = m\omega^2 r \quad (2) \blacktriangleright \quad T_A \operatorname{sen} 60^\circ + T_B \operatorname{sen} 30^\circ = m\omega^2 r$$

onde r é o raio da circunferência descrita pela partícula. Da figura (a),

$$r = \overline{PC} = \overline{AC}\,\mathrm{tg}\,60^\circ = \overline{CB}\,\mathrm{tg}\,30^\circ \quad \blacktriangleright \quad \overline{AC} = \left(\frac{\mathrm{tg}\,30^\circ}{\mathrm{tg}\,60^\circ}\right)\overline{CB} = \frac{1}{3}\overline{CB}$$
$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = l \quad \blacktriangleright \quad \frac{1}{3}\overline{CB} + \overline{CB} = l \Rightarrow \overline{CB} = \frac{3}{4}l$$

Como $r = \overline{CB}\,\mathrm{tg}\,30^\circ$ então

$$r = \frac{3}{4}l\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}l.$$

De (1), obtém-se

$$\frac{1}{2}T_A - \frac{\sqrt{3}}{2}T_B - mg = 0 \Rightarrow T_A = \sqrt{3}\,T_B + 2mg$$

que substituindo em (2)

$$\left(\sqrt{3}\,T_B + 2mg\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}T_B = m\omega^2 r \Rightarrow \frac{3}{2}T_B + \sqrt{3}\,mg + \frac{1}{2}T_B = m\omega^2 r \Rightarrow 2T_B = m\omega^2 r - \sqrt{3}\,mg$$

encontra-se

$$T_B = \frac{m\omega^2}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}l - \frac{\sqrt{3}}{2}mg \Rightarrow T_B = \frac{\sqrt{3}}{2}m\left(\frac{\omega^2 l}{4} - g\right)$$

Como $T_A = \sqrt{3}\,T_B + 2mg$, então

$$T_A = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}m\left(\frac{\omega^2 l}{4}\omega^2 l - g\right) + 2mg \Rightarrow T_A = \frac{m}{2}\left(\frac{3}{4}\omega^2 l + g\right)$$

Fio frouxo Para que o fio inferior fique frouxo, o que corresponde à tensão $T_B = 0$, a projeção da tensão no fio superior deve responder pela força centrípeta. Para a situação indicada nas figurasm isso deve ocorrer para $\omega = \omega_{\text{critico}}$. Assim,

$$\begin{array}{ll} \text{Direção } x & \blacktriangleright \quad R_x = T_A \operatorname{sen} 60^\circ \\ \text{Direção } y & \blacktriangleright \quad R_y = T_A \cos 60^\circ - mg \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} R_y = 0 & (1) \blacktriangleright & T_A \cos 60^\circ - mg = 0 \\ R_x = m\omega_{\text{critico}}^2 r & (2) \blacktriangleright & T_A \operatorname{sen} 60^\circ = m\omega_{\text{critico}}^2 r \end{array}$$

De (1)

$$T_A = \frac{mg}{\cos 60^\circ}$$

e de (2), com $r = \frac{\sqrt{3}}{4} l$

$$\frac{mg}{\cos 60^\circ} \operatorname{sen} 60^\circ = m\omega_{\text{critico}}^2 r \Rightarrow \omega_{\text{critico}} = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} 60^\circ}{r}} = \sqrt{\frac{g\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{4} l}} = \sqrt{\frac{4g}{l}}$$

ou

$$\blacktriangleright\ \omega_{\text{critico}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

★ ★ ★