MOVIMENTO BIDIMENSIONAL

Atenção Leia o assunto no livro-texto e nas notas de aula e reproduza os problemas resolvidos aqui. Outros são deixados para v. treinar

PROBLEMA 1 Um projétil é disparado com velocidade de 600 m/s, num ângulo de $60°$ com a horizontal. Calcular **(a)** o alcance horizontal, **(b)** a altura máxima, **(c)** a velocidade e a altura 30s após o disparo, **(d)** a velocidade e o tempo decorrido quando o projétil está a 10 km de altura.

SOLUÇÃO As equações para este movimento são

$$\begin{aligned} a_x(t) &= 0 & a_y(t) &= -g \\ v_x(t) &= v_0 \cos\theta & v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \\ x(t) &= (v_0 \cos\theta)\, t & y(t) &= (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

▸ **Dados:**

$$\mathbf{v}_0 = \begin{cases} v_0 = 600 m/s \\ \theta = 60° \end{cases} \qquad g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

▸ **Diagrama:**

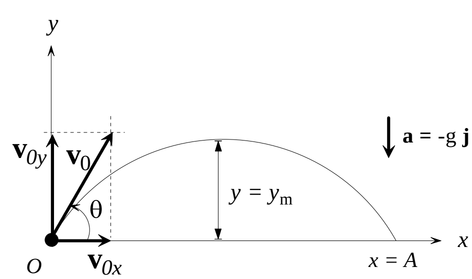

Figura 1

▸ **(a) Alcance horizontal** Seja $t = t_A$ o instante em que o projétil atinge o ponto $x = A$. A distância OA é chamada de alcance do projétil, que é obtida fazendo-se $y(t_A) = 0.$ Assim, da expressão para $y(t),$ encontramos

$$y(t) = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}at^2 = 0 \Rightarrow \left(v_0 \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}gt\right)t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \end{cases}$$

Estas duas raízes correspondem às duas situações em que o projétil se encontra em $y = 0,$ uma no instante de lançamento, $t = t_0 = 0,$ e a outra ao atingir o solo no ponto $x = A,$ $t = t_A = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}.$ Portanto, substituindo os valores, encontra-se

$$t_A = \frac{2 \times 600 \times \operatorname{sen} 60°}{9,8} = \frac{2 \times 600 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{9,8} = 106 \text{ s}$$

Para calcular o alcance basta substituir este tempo em $x(t),$ $x(t_A) = A,$ ou seja,

$$A = (v_0 \cos\theta)\, t_A = 600 \times \cos 60° \times 106 = 31.800 \text{ m } = 31,8 \text{ km}$$

▸ **(b) Altura máxima** Demonstramos em classe que $t_A = 2t_m$. Logo o tempo para atingir a altura máxima vale

$t_m = 53s$. Assim, $y(t_m) = y_m$, ou seja

$$y_m = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t_m - \frac{1}{2}gt_m^2 = 600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 53 - \frac{1}{2} \times 9,8 \times 53^2 = 13775,5 \text{ m}$$

▸ **(c) Velocidade e altura** 30**s após o disparo** Para calcular a velocidade, vamos primeiro calculara as componentes

$$v_x(30\text{s}) = v_0 \cos 60^{\circ} = 600 \times 0,5 = 300 \text{ m/s}$$

$$v_y(30\text{s}) = v_0 \operatorname{sen} 60^{\circ} - gt = 600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 9,8 \times 30 = 225,6 \text{ m/s}$$

Como $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$ então

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{300^2 + 225,6^2} = 375,4 \text{ m/s}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{225,6}{300}\right) = \operatorname{arctg}(0,75) = 37^{\circ}$$

A altura $y(30s)$ vale

$$y(30s) = 600 \times \operatorname{sen} 60^{\circ} \times 30 - \frac{1}{2} \times 9,8 \times 30^2 = 11,178 \text{ m} = 11,2 \text{ km.}$$

▸ **(d) Velocidade e tempo para** $y = 10$ **km** Neste caso, basta fazer $y = 10.000$ na expressão de y(t) e determinar o t correspondente:

$$10.000 = \left(600 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t - \frac{1}{2} \times 9,8t^2$$

ou

$$4,9t^2 - 522t + 10.000 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 25 \text{ s} \\ 81 \text{ s} \end{cases}$$

Estas duas soluções para $y = 10.000$ m correspondem aos dois valores de x, isto é,

$$x_1 = 600 \times 0,5 \times 25 = 7.500 \text{ m} = 7,5 \text{ km}$$
$$x_2 = 600 \times 0,5 \times 81 = 24.300 \text{ m} = 24,3 \text{ km}$$

em torno de $x_m = 600 \times 0,5 \times 53 = 15.900$ m $= 15,9$ km. Como vimos em sala, em pontos simétricos em relação a x_m, como são x_1 e x_2, as velocidades são iguais, invertendo apenas a componente y, ou seja, $v_{y(1)} = -v_{y(2)}$. Assim, para calcular a velocidade basta substituir $t = 25$ s nas expressões $v_x(t)$ e $v_y(t)$ para a componentes de $\mathbf{v}$,

$$v_x(25\text{s}) = 600 \times \cos 60^{\circ} = 300 \text{ m/s}$$
$$v_y(25\text{s}) = 600 \times \operatorname{sen} 60^{\circ} - 9,8 \times 25 = 275 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}(25 \text{ s}) = \begin{cases} v(25\text{s}) = \sqrt{300^2 + 275^2} = 407 \text{ m/s} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{275}{300}\right) = 43^{\circ} \end{cases}$$

★ ★ ★

PROBLEMA 2 Um avião de bombardeio voa horizontalmente com velocidade de 180 km/h na altitude de 1,2 km. **(a)** Quanto tempo antes de o avião sobrevoar o alvo ele deve lançar uma bomba? **(b)** Qual a velocidade da bomba quando ela atinge o solo? **(c)** Qual a velocidade da bomba quando ela está a 200 m de altura? **(d)** Qual a distância horizontal percorrida pela bomba?

SOLUÇÃO As equação que usaremos são

$$\begin{aligned} a_x(t) &= 0 & a_y(t) &= -g \\ v_x(t) &= v_0 \cos\theta & v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \\ x(t) &= (v_0 \cos\theta)\, t & y(t) &= y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

▸ **Dados:**

$$\mathbf{v}_0 = \begin{cases} v_0 = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}, \\ \theta = 0°, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = 1,2 \text{ km/h} = 1.200 \text{ m}, \\ x_0 = 0, \end{cases} \qquad g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

▸ **Diagrama:**

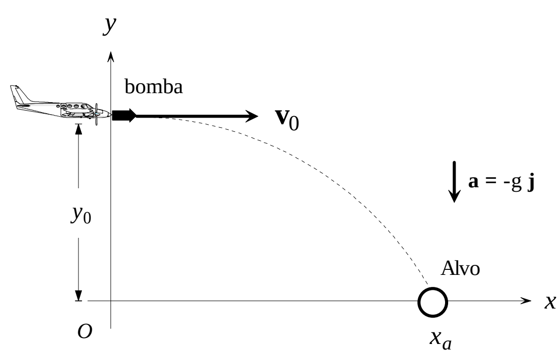

Figura 2

▸ **(a) Tempo antes do sobrevoar o alvo** O diagrama mostra que o avião deve lancar a bomba a uma distância horizontal x_a do alvo para que este seja atingido. Em outras palavras, ao lançar a bomba sobre O esta percorre sua trajetória e atinge o solo no ponto de coordenadas $x = x_a$ e $y_a = 0$ (alvo). Fazendo $y(t_a) = 0$ encontra-se o tempo que a bomba leva para atingir o alvo ao ser lançada sobre O.

$$y(t) = y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = 1.200 - \frac{1}{2} \times 9,8\, t_a^2 \Rightarrow t_a = \pm 15,6 \text{ s}$$

A solução $t_a = -15,6$ não serve porque t é um intervalo de tempo e tem que ser positivo. Portanto, a solução fisicamente aceitável é $t_a = 15,6$ s. Logo, o avião tem que lançar a bomba $15,6$ s antes de sobrevoar o alvo para que ela o atinja.

▸ **(b) Velocidade da bomba ao atingir o solo** Usando as componentes v_x e v_x, encontramos

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta \Rightarrow v_x = 50 \text{ m/s} \\ v_y &= v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \Rightarrow v_y = -9,8\, t_a = -153 \text{ m/s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{v}_a = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} \Rightarrow \begin{cases} v_a = \sqrt{50^2 + (-153)^2} = 161 \text{ m/s} \\ \theta_a = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-153}{50}\right) = -72° \end{cases}$$

Ou seja, a bomba atinge o alvo com uma velocidade cujo módulo vale $v_a = 161$ m/s, com um ângulo $\theta_a = 72°$ abaixo da horizontal.

▸ **(c) Velocidade da bomba em $y = 200$ m** Para isto, basta calcular o tempo que a bomba leva para atingir $y = 200$ m e com ele determinar as componentes de $\mathbf{v}$. Assim,

$$y(t) = y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 200 = 1.200 - 4,9t^2 \Rightarrow t = \pm 14,3 \text{ s}$$

Novamente a solução física é $t = 14,3$ s. Com este tempo calculamos $\mathbf{v}$, ou seja,

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\theta \Rightarrow v_x = 50 \text{ m/s} \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \Rightarrow v_y = -9,8 \times 14,3 = -140 \text{ m/s} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{v}_a = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_a = \sqrt{50^2 + (-140)^2} = 149 \text{ m/s} \\ \theta_a = \operatorname{arctg}\left(\frac{-140}{50}\right) = -70^{\circ} \end{array}\right.$$

▸ **(d) Distância horizontal percorrida pela bomba** Desde o lançamento até tocar no solo, a bomba levou um tempo $t_a = 15,6$ s. Portanto, a distância horizontal que a bomba percorre é dada por $x = x(t_a)$. Logo

$$x(t) = (v_0 \cos\theta)\, t \Rightarrow x = 50 \times 15,6 = 780 \text{ m}$$

★★★

PROBLEMA 3 Um projétil é disparado num ângulo de $35°$ com a horizontal. Ele atinge o solo a 4 km do ponto do disparo. Calcular **(a)** o módulo da velocidade inicial, **(b)** o tempo de trânsito do projétil, **(c)** a altura máxima, **(d)** o módulo da velocidade no ponto de altura máxima.

SOLUÇÃO As equações que usaremos são

$$\begin{array}{ll} a_x(t) = 0 & a_y(t) = -g \\ v_x(t) = v_0 \cos\theta & v_y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \\ x(t) = (v_0 \cos\theta)\, t & y(t) = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array}$$

Dados:

$$\left\{\begin{array}{l} x_A = 4 \text{ km} = 4.000 \text{ m}, \\ \theta = 35°, \end{array}\right. \qquad g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Diagrama:

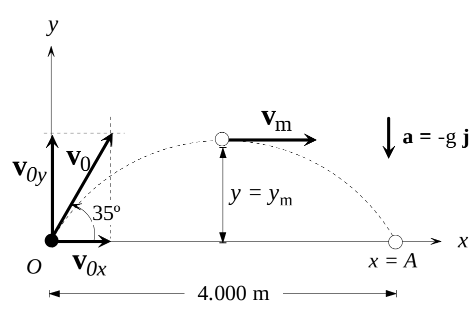

Figura 3

▸ **(a) Módulo da velocidade inicial** O problema forneceu o alcance: $A = 4.000$ m. Então, podemos usar o resultado $t_A = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$, obtido no **Problema 1,** e fazer $A = (v_0 \cos\theta)\, t_A$ para encontrar a velocidade incial. Assim,

$$A = (v_0 \cos\theta)\frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gA}{\operatorname{sen} 2\theta}} = \sqrt{\frac{9,8 \times 4.000}{0,94}} = 204 \text{ m/s}$$

▸ **(b) Tempo de trânsito** Este é o tempo que o projétil levou para atingir o solo, t_A (também conhecido como tempo de vôo). Logo, da expressão para t_A, encontra-se

$$t_A = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{2 \times 204 \times 0,5}{9,8} = 23,7 \text{ s}$$

▸ **(c) Altura máxima** Já vimos que $t_m = \frac{t_A}{2}$ e portanto $t_m = 11,9$ s. Substituindo na expressão para $y(t)$ encontra-se

$$y_m = y(t_m) = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t_m - \frac{1}{2}gt_m^2 = 204 \times 0,57 \times 11,9 - 0,5 \times 9,8 \times 11,9^2 = 670 \text{ m}$$

▸ **(d) Módulo de v$_m$** Como sabemos o tempo que o projétil leva para atingir a altura máxima, podemos calcular as componentes de sua velocidade. Neste caso, devemos lembrar que a componente y da velocidade se anula. Então, temos apenas a componente x,

$$v_x = v_0 \cos 35^\circ = 204 \times 0,82 = 167 \text{ m/s}$$
$$v_y = 0$$

Assim, o módulo da velocidade no ponto de altura máxima é:

$$v_m = 167 \text{ m/s}$$

★ ★ ★

PROBLEMA 4 Um avião voa horizontalmente na altitude de 1 km com a velocidade de 200 km/h. Ele deixa cair uma bomba sobre um navio que se move no mesmo sentido e com a velocidade de 20 km/h. **(a)** Calcule a distância horizontal entre o avião e o navio, no instante do lançamento, para que este seja atingido pela bomba. **(b)** Resolver o mesmo problema para o caso de o avião e o navio terem movimentos de sentidos contrários.

SOLUÇÃO As equação que usaremos são

$$\begin{aligned} a_x(t) &= 0 & a_y(t) &= -g \\ v_x(t) &= v_0 \cos\theta & v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \\ x(t) &= (v_0 \cos\theta)\, t & y(t) &= y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Dados:

Avião	**Navio**	
$y_0 = 1$ km $= 1.000$ m	$v_n = 20$ km/h $= 5,6$ m/s	$g = 9,8$ m/s^2
$v_a = 200$ km/h $= 56$ m/s		

Diagrama:

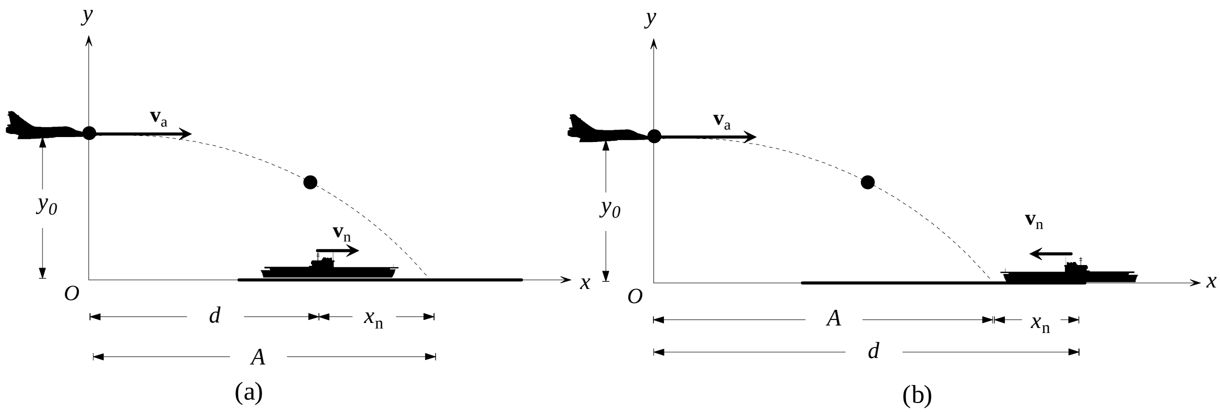

Figura 4 Posições do avião e do navio no instante do lançamento.

▸ **(a) Cálculo de** d A bomba é deixada cair de um avião que voa a 56 m/s. Portanto, a bomba é lançada horizontalmente ($\theta = 0^o$) com velocidade inicial

$$\left.\begin{aligned} v_{0x} &= 56 \text{ m/s} \\ v_{0y} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_0 = 56 \text{ m/s}.$$

Para atingir o navio, a bomba deve ser lançada sobre o ponto $O,$ que está a uma distância horizontal d do navio (Figura 4(a)). Observe nesta figura que $A = d + x_n,$ onde A é o alcance do projétil e x_n é a distância percorrida pelo navio desde o instante do lançamento da bomba e d é a distância procurada. Mas, o tempo que o projétil leva para percorrer a distância $x = A$ (alcance) é obtido fazendo $y(t) = 0$ para $t = t_A,$ ou seja,

$$y(t) = y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = 1.000 - 4,9t^2 \Rightarrow t = \pm 14,3 \text{ s}$$

e, portanto, $t_A = 14,3$ s. Logo,

$$A = x(t_A) \Rightarrow A = (v_0 \cos 0^o)\, t_A = 56 \times 14,3 = 800 \text{ m}$$

Por outro lado, neste intervalo de tempo t_A o navio percorreu uma distância x_n (MRU) dada por

$$x_n = v_n t_A = 5,6 \times 14,3 = 80 \text{ m}$$

Desta maneira, usando a identidade $A = d + x_n$ encontramos

$$d = A - x_n = 800 - 80 = 720 \text{ m}.$$

▸ **(b)** Neste caso o navio está em movimento em sentido contrário ao do avião (Figura 4(b)). Nesta figura obsevamos que $d = A + x_n.$ Como os valores são os mesmos, encontramos

$$d = 800 + 80 = 800 \text{ m}.$$

★ ★ ★

PROBLEMA 5 Calcular a velocidade angular de um disco que gira com movimento uniforme de $13,2$ rad em cada 6 s. Calcular, também, o período e a freqüência do movimento.

SOLUÇÃO Como o disco gira de um ângulo $\Delta\theta = 13,2$ rad em $\Delta t = 6$ s, sua velocidade angular é dada por

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{13,2}{6} = 2,2 \text{ rad/s}$$

Neste caso, o período do movimento, dado pela expressão, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, vale

$$T = \frac{2 \times 3,14}{2,2} = 2,9 \text{ s}$$

A frequência é definida como o inverso do período, $\nu = \frac{1}{T}$. Portanto,

$$\nu = \frac{1}{2,9} = 0,34 \text{ Hz ou } \nu = 0,34 \text{ s}^{-1}.$$

★★★

PROBLEMA 6 Quanto tempo leva o disco do problema anterior para **(a)** girar de um ângulo de 780°, e para **(b)** completar 12 revoluções?

SOLUÇÃO **(a)** Como a velocidade angular do disco é constante e igual a $\omega = 2,2$ rad/s, então para girar de um ângulo $\Delta\theta = 780^{\circ} = 13,6$ rad, o tempo gasto é dado por

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{13,6}{2,2} = 6,2 \text{ s}$$

(b) Ao completar 12 revoluções, o disco terá girado de um ângulo $\Delta\theta = 12 \times 2\pi = 75,4$ rad (lembre-se que cada volta equivale a 2π rad). Portanto,

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{75,4}{2,2} = 34,3 \text{ s}$$

★★★

PROBLEMA 7 Calcular **(a)** a velocidade angular, **(b)** a velocidade linear, e **(c)** a aceleração centrípeta da Lua, considerando-se que a Lua leva 28 dias para fazer uma revolução completa, e que a distância da Terra à Lua é $38,4 \times 10^4$ km.

SOLUÇÃO **(a)** Para calcular a velocidade angular da Lua, basta usar a definição $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ onde $\Delta\theta = 2\pi$ rad $= 6,28$ rad é o ângulo que a Lua percorre no intervalo $\Delta t = 28$ dias $= 28 \times 24 \times 60 \times 60 = 2,42 \times 10^6$ s. Assim,

$$\omega = \frac{6.28}{2.42 \times 10^6} = 2,6 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$$

(b) Sabendo o raio da órbita, $R = 38,4 \times 10^4$ km $= 38,4 \times 10^7$ m, a velocidade linear, dada por $v = \omega R$, vale

$$v = 2,6 \times 10^{-6} \times 38,4 \times 10^7 = 998,4 \text{ m/s}$$

(c) A aceleração centrípeta, definida como $a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$, vale então

$$a_c = \frac{998,4^2}{38,4 \times 10^7} = 2,6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

★★★

PROBLEMA 8 Um volante com diâmetro de 3 m gira a 120 rpm. Calcular: **(a)** a sua freqüência, **(b)** o seu período, **(c)** a sua velocidade angular, e **(d)** a velocidade linear de um ponto na sua periferia.

SOLUÇÃO **(a)** Como o volante gira a uma taxa de 120 rpm (rotações por minuto), ou seja, realiza 120 rotações em cada 1 min $= 60$ s. Por isto, o número de rotações por segundo, que é a sua frequência, vale

$$\nu = \frac{120}{60} = 2 \text{ Hz}.$$

(b) O período é o inverso desta frequência, e então vale

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s}$$

que é o tempo que o volante gasta para realizar uma volta.

(c) A velocidade angular é

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3,14}{0,5} = 12,6 \text{ rad/s.}$$

(d) A velocidade linear, em qualquer ponto da periferia, é dada por $v = \omega R$. Mas, o diâmetro do volante vale $D = 3$ m, de onde tiramos o raio $R = 1,5$ m. Assim,

$$v = 12,6 \times 1,5 = 18,9 \text{ m/s}$$

★ ★ ★

PROBLEMA 9 A velocidade angular de um volante aumenta uniformemente de 20 rad/s para 30rad/s em 5 s. Calcular a aceleração angular e o ângulo total através do qual o volante gira nesse intervalo de tempo.

SOLUÇÃO Sabe-se que a aceleração angular é definida por $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. Assim,

$$\alpha = \frac{30 - 20}{5} = 2 \text{ rad/s}^2.$$

A lei horária do movimento circular uniformemente acelerado $\left(t_0 = 0 \text{ e } \theta_0 = 0\right)$ é

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \theta(5 \text{ s}) = 20 \times 5 + \frac{1}{2} \times 2 \times 5^2 = 125 \text{ rad.}$$

★ ★ ★

PROBLEMA 10 Um ponto descreve uma circunferência de acordo com a lei $s(t) = t^3 + 2t^2$, onde s é medido em metros ao longo da circunferência e t, em segundos. Se a aceleração total do ponto é $16\sqrt{2}$ m/s^2, quando $t = 2$ s, calcular o raio R da circunferência.

SOLUÇÃO Trata-se aqui de um movimento circular qualquer. O problema fornece o módulo da aceleração total do ponto, isto é, $a(2 \text{ s})$= $16\sqrt{2}$ m/s^2. Como sabemos, aceleração total num movimento qualquer possui duas componentes, ou seja,

$$\mathbf{a} = a_T\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + a_N\,\hat{\mathbf{r}} \Rightarrow a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

Por isto, precisamos calcular os módulos das acelerações tangencial (a_N) e normal (a_N). De acordo com as Eqs. (3.8.16) e (3.8.17) do LT,

$$a_T = \frac{dv}{dt} \text{ e } a_N = \frac{v^2}{R}.$$

Agora precisamos calcular v. Como é dada a lei horária em termos do arco percorrido, $s(t)$, podemos calcular o módulo da velocidade instantânea num instante t qualquer, que é dada pela derivada desta função: $v(t) = \frac{ds}{dt}$. Assim, lembrando que a derivada de uma potência t^n é dada por $\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$, encontra-se

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 + 2t^2) = 3t^2 + 4t.$$

e, portanto,

$$a_T(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 4t) = 6t + 4$$
$$a_N(t) = \frac{v^2}{R} = \frac{(3t^2 + 4t)^2}{R}$$

Logo, para $t = 2,$ encontra-se

$$a_T(2\text{ s}) = 6 \times 2 + 4 = 16\text{ m/s}^2$$
$$a_N(2\text{ s}) = \frac{(3 \times 2^2 + 4 \times 2)^2}{R} = \frac{400}{R}$$

Usando agora a expressão para o módulo da aceleração total e igualando a seu valor em $t = 2$ s, que foi dado, encontra-se

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \Rightarrow 16\sqrt{2} = \sqrt{16^2 + \left(\frac{400}{R}\right)^2} \Rightarrow 256 + \frac{160.000}{R^2} = 512$$

Resolvendo para $R,$ temos finalmente,

$$(512 - 256)R^2 = 160.000 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{160.000}{256}} = \sqrt{625} = 25\text{ m.}$$

★★★

PROBLEMA 11 As coordenadas de um corpo são $x = 2\cos\omega t,\ y = 2\,\mathrm{sen}\,\omega t$ onde x e y são medidos em metros. **(a)** Obter a equação cartesiana da trajetória, **(b)** Calcular o valor da velocidade num instante qualquer, **(c)** Calcular as componentes tangencial e normal da aceleração num instante qualquer. Identificar o tipo de movimento descrito pelas equações acima.

SOLUÇÃO **(a)** Para obter a equação da trajetória em coordenadas cartesianas, vamos eliminar ωt entre as equações para x e $y.$ Ou seja,

$$\cos\omega t = \frac{x}{2} \text{ e } \mathrm{sen}\,\omega t = \frac{y}{2} \Rightarrow \cos^2\omega t + \mathrm{sen}^2\omega t = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

ou seja, a equação da trajetória no sistema Oxy é

$$x^2 + y^2 = 4.$$

que é a equação de uma circunferência de raio $r = 2$ m com origem no ponto O (Figura 5).

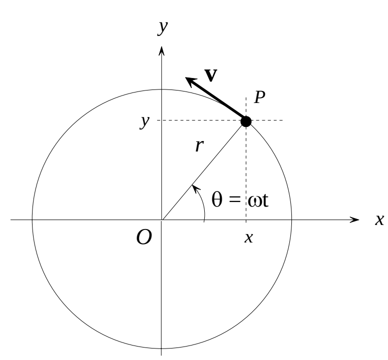

Figura 5

.

(b) Para calcular o módulo da velocidade num instante qualquer, basta usar a expressão em termos de suas componentes no sistema Oxy. As componentes são,

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2\cos\omega t) = -2\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(2\,\mathrm{sen}\,\omega t) = 2\omega\cos\omega t \end{aligned}$$

onde usamos as identidades,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\cos\omega t) &= -\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ \frac{d}{dt}(\mathrm{sen}\,\omega t) &= \omega\cos\omega t \end{aligned}$$

para as derivadas de $\cos\omega t$ e $\mathrm{sen}\,\omega t$, respectivamente. Logo, o módulo da velocidade em qualquer tempo, é dado por:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t)^2 + (2\omega\cos\omega t)^2} = \sqrt{4\omega^2(\mathrm{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t)} = 2\omega \text{ m/s}$$

mostrando que é independente do tempo.

(c) As acelerações tangencial e normal são dadas por

$$\begin{aligned} a_T &= \frac{dv}{dt} = 0 \\ a_N &= \frac{v^2}{R} = \frac{4\omega^2}{R} \end{aligned}$$

onde $a_T = 0$, reflete o fato de que $v(t) =$ constante. Na útlima equação, R é o raio de curvatura da curva no ponto P, cujas coordenadas são (x, y). Mas, a equação da trajetória, obtida no ítem **(a)**, dada por

$$x^2 + y^2 = 4$$

é a equação de uma circunferência de raio $r = 2$ com centro na origem O (Figura 5). Sendo uma circunferência, o raio de curvatura é constante em todos os pontos, de modo que podemos fazer $R = r = 2$ na expressão de a_N para obter finalmente

$$\begin{aligned} a_T &= 0 \\ a_N &= \frac{4\omega^2}{R} = \frac{4\omega^2}{2} = 2\omega^2 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

o que resulta numa aceleração total de módulo iguala $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = 2\omega^2$ m/s^2

★ ★ ★