Física Básica: Mecânica - H. Moysés Nussenzveig, 4.ed, 2003

Problemas do Capítulo 2

por

Abraham Moysés Cohen

Departamento de Física - UFAM

Manaus, AM, Brasil - 2004

Problema 1

Na célebre corrida entre a lebre e a tartaruga, a velocidade da lebre é de 30 km/h e a da tartaruga é de 1,5m/min. A distância a percorrer é de 600m, e a lebre corre durante 0,5min antes de parar para uma soneca. Qual é a duração máxima da soneca para que a lebre não perca a corrida? Resolva analiticamente e graficamente.

Dados do problema

$\Delta x := 600\text{m} \quad v_{leb} := 30\,\frac{\text{km}}{\text{hr}} \quad v_{tar} := 1.5\,\frac{\text{m}}{\text{min}} \qquad \Delta t := 0.5\text{min}$

Pede-se:

$t_{son} = ?$ - tempo da soneca

Solução

Equações de movimento: como o movimento é uniforme, usaremos apenas a equação que nos fornece a distância percorrida em função do tempo:

$$\Delta x = v \cdot t$$

O tempo total que cada um gasta para percorer a distância Δx é dado por:

$$t_{leb} := \frac{\Delta x}{v_{leb}} \qquad \text{e} \qquad t_{tar} := \frac{\Delta x}{v_{tar}}$$

Assim:

$$t_{leb} = 72\,\text{s} \qquad \text{e} \qquad t_{tar} = 2.4 \times 10^{4}\,\text{s}$$

Para que a lebre não perca a corrida, seu tempo de percurso somado com o tempo da soneca deve ser igual ao tempo de percurso da tartaruga. Portanto:

$$\text{Given} \qquad t_{leb} + t_{son} = t_{tar} \qquad t_{son} := \text{Find}(t_{son}) \rightarrow -20.\cdot\frac{\text{m}\cdot\text{hr} - 20.\cdot\text{min}\cdot\text{km}}{\text{km}}$$

Assim, o tempo de soneca será de $t_{son} = 2.393 \times 10^{4}\,\text{s}$. Ou, dado em horas, este tempo será $t_{son} = 6.647\text{hr}$.

Resposta: A lebre pode tirar uma soneca de **6h 38min 49s** sem perder a corrida para a tartaruga.

Problema 2

Um carro de corridas pode ser acelerado de 0 a 100km/h em 4s. Compare a aceleração média com a aceleração da gravidade. Se a aceleração é constante, que distância o carro percorre até atingir 100km/h?

Dados do problema

$v_0 := 0\,\frac{km}{hr}$, $\qquad v := 100\,\frac{km}{hr}$ $\qquad \Delta t := 4s$

Pede-se

a_m = ? (aceleração média)

Δx = ? (distância percorrida pelo carro até atingir 100km/h)

Solução

A aceleração média é calculada pela fórmula $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ onde Δv é a variação da velocidade no intervalo de tempo Δt, ou seja, $a_m := \frac{v - v_0}{\Delta t}$. Portanto,

$$a_m = 6.9\,\frac{m}{s^2}\ .$$

Como $g := 9.8\,\frac{m}{s^2}$, então

$$\frac{a_m}{g} = 0.71$$

ou seja, $a_m = 0.71g$.

Durante o tempo em que foi acelerado de 0 a 100km/h. o carro percorreu uma distância dada por

$$\Delta x := \frac{1}{2}\cdot a_m\cdot \Delta t^2$$

Logo,

$$\Delta x = 55.6\,m$$

Problema 3

Um motorista percorre 10km a 40km/h, os 10km seguintes a 80km/h mais 10km a 30km/h. Qual é a velocidade média do seu percurso? Compare-a com a média aritmética das velocidades.

Dados do problema

$\Delta x_1 := 10\text{km}$ $\quad v_1 := 40\,\frac{\text{km}}{\text{hr}}$ $\quad \Delta x_2 := 10\text{km}$ $\quad v_2 := 80\,\frac{\text{km}}{\text{hr}}$ $\quad \Delta x_3 := 10\text{km}$ $\quad v_3 := 30\,\frac{\text{km}}{\text{hr}}$

Pede-se

vm = ? - velocidade média no percurso

Solução

Velocidade média. A velocidade média num percurso é definida como

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

onde Δx é o deslocamento ocorrido durante o intervalo de tempo Δt. Para calcular a velocidade média, precisamos antes calcular o intervalo de tempo do percurso. Para isso usaremos a equação de movimento do MRU, ou seja,

$$\Delta t_1 := \frac{\Delta x_1}{v_1},\ \Delta t_2 := \frac{\Delta x_2}{v_2},\ \Delta t_3 := \frac{\Delta x_3}{v_3}$$

Desta maneira, o intervalo de tempo total é dado pela soma de cada um desses termos. Logo,

$$\Delta t := \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3.$$

Assim,

$$\Delta t = 2.55 \times 10^3\,\text{s}, \text{ ou } \Delta t = 0.708\,\text{hr}.$$

Como o deslocamento neste intervalo de tempo é de $\Delta x := \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$, isto é, $\Delta x = 30\,\text{km}$. Então, como

$$v_m := \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

encontra-se

$$v_m = 42.4\,\frac{\text{km}}{\text{hr}}$$

Média das velocidades. Por outro lado, a média das velocidades é obtida calculando-se a média aritmética das velocidades v_1, v_2 e v_3. Assim,

$$v_{MA} := \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$$

Assim,

$$v_{MA} = 50\,\frac{\text{km}}{\text{hr}},$$

o que demonstra que estas duas quantidades em geral são diferentes.

Problema 4

Um avião a jato de grande porte precisa atingir a velocidade de 500km/h para decolar, e tem uma aceleração de 4m/s2. Quanto tempo ele leva para decolar e que distância percorre na pista até a decolagem?

Dados do problema

$v_0 := 0 \frac{km}{hr}$ - velocidade inicial do avião

$v := 500 \frac{km}{hr}$ - velocidade final para decolar

$a := 4 \frac{m}{s^2}$ - aceleração

Pede-se

Δt = ? - intervalo de tempo para decolar

Δx = ? - distância percorrida durante a decolagem

Solução

Distância percorrida. Sabendo a velocidade inicial, a velocidade final e a aceleração, podemos calcular a distância percorrida, usando a equação de Torricelli. Assim,

Given

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x \ ,$$

$$\Delta x := \text{Find}(\Delta x) \rightarrow 31250 \cdot \frac{km^2}{hr^2 \cdot m} \cdot s^2$$

Ou seja, a distância percorrida será de:

$$\Delta x = 2.41\,km$$

Tempo de decolagem. Conhecendo a velocidade inicial, a velocidade final e a aceleração, podemos também calcular o tempo de decolagem, usando a equação de movimento, isto é,

Given

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$t := \text{Find}(t) \rightarrow 125 \cdot \frac{km}{hr \cdot m} \cdot s^2$. Assim,

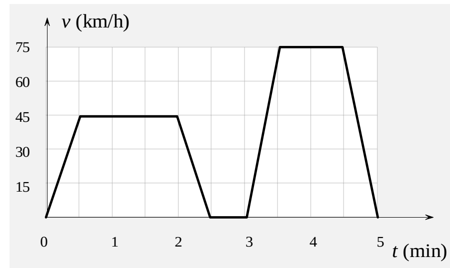
$$t = 34.7\,s$$

Problema 5

O gráfico da figura representa a marcação do velocímetro de um automóvel em função do tempo. Trace os gráficos correspondentes da acelaração e do espaço percorrido pelo automóvel em função do tempo. Qual é a aceleração média do automóvel entre *t* = 0 e *t* = 1min? E entre *t* = 2min e *t* = 3min ?

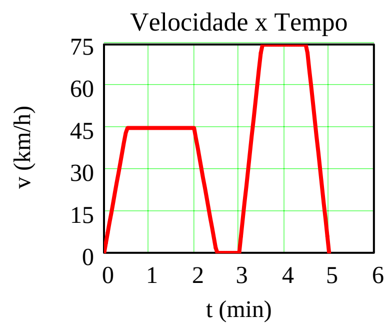
Dados do problema

Ver gráfico ao lado.



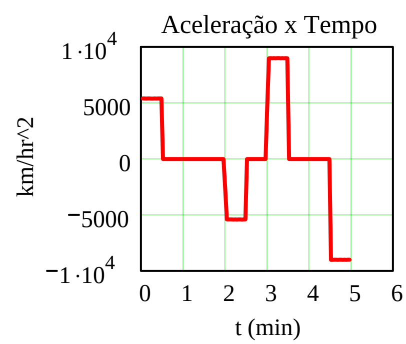
Solução

$$t := 0, 0.04 .. 5 \qquad v(t) := \begin{cases} 90\cdot t & \text{if } t \ge 0 \wedge t \le 0.5 \\ 45 & \text{if } t \ge 0.5 \wedge t \le 2 \\ 45 - 90\cdot(t-2) & \text{if } t \ge 2 \wedge t \le 2.5 \\ 0 & \text{if } t \ge 2.5 \wedge t \le 3 \\ 150\cdot(t-3) & \text{if } t \ge 3 \wedge t \le 3.5 \\ 75 & \text{if } t \ge 3.5 \wedge t \le 4.5 \\ 75 - 150\cdot(t-4.5) & \text{if } t \ge 4.5 \wedge t \le 5 \end{cases}$$



Aceleração. A aceleração é calculada tomando a derivada da função velocidade. Neste caso,

$$a(t) := 60\cdot\frac{d}{dt}v(t)$$



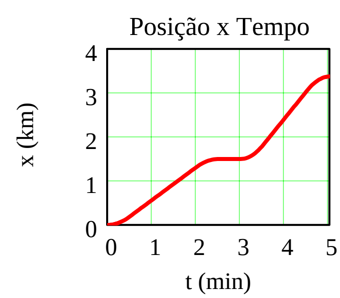
Posição do automóvel. Para calcular a posição do automóvel em cada instante, devemos encontrar a área sob a curva vxt. Isto pode ser feito através de uma integral. Assim,

$$x(t) := \frac{1}{60}\cdot\int_0^t v(t)\,dt$$

Aceleração média. Por definição, a aceleração média é dada pela fórmula:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

onde Δv é a variação da velocidade no intervalo de tempo Δt.



Intervalo: 0 a 1min:

$$a_m := \frac{45\frac{km}{hr} - 0}{\frac{hr}{60}} \rightarrow \qquad a_m = 6.94$$

Intervalo: 2 a 3min:

$$a_m := \frac{0 - 45\frac{km}{hr}}{\frac{hr}{60}} \rightarrow \qquad a_m = 0.21\,\frac{m}{s^2}$$

Problema 6

Uma partícula, inicialmente em repouso na origem, move-se durante 10s em linha reta, com aceleração crescente segundo a lei $a = b\cdot t$, onde t é o tempo e b = 0.5 m/s^2. Trace os gráficos da velocidade v e da posição x da partícula em função do tempo. Qual é a expressão analítica de v(t) ?

Dados do problema

$v_0 := 0$ $\quad t := 0s, 0.01s .. 10s$ $\qquad b := 0.5\frac{m}{s^3}$ $\qquad a(t) := b\cdot t$

Pede-se

(a) Gráficos v(t) e x(t) (b) Expressão analítica de v(t)

Solução

Expressão analítica de v(t). Sabendo a expressão da aceleração, é direto calcular v(t). De fato, partindo da definição de aceleração,

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$$

podemos integrar esta equação para obter,

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a(t)\, dt$$

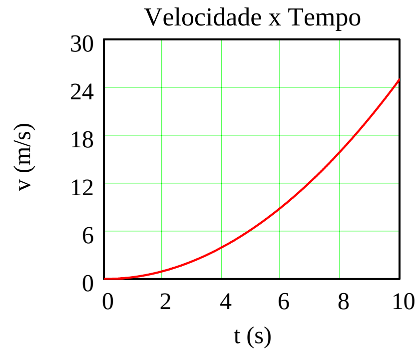
Como $v(0) := v_0$ = 0, a integral torna-se

$$v(t) := \int b\cdot t\, dt$$

e, portanto,

$$v(t) := \frac{1}{2}\cdot b\cdot t^2$$

O gráfico desta função é mostrado na figura ao lado.



Problema 7

O tempo médio de reação de um motorista (tempo que decorre entre perceber um perigo súbito e aplicar os freios) é da ordem de 0,7s. Um carro com bons freios, numa estrada seca pode ser freiado a 6m/s ^{2};. Calcule a distância mínima que um carro percorre depois que o motorista avista o perigo, quando ele trafega a 30km/h, a 60km/h e a 90km/h. Estime a quantos comprimento do carro corresponde cada uma das distâncias encontradas.

Dados do problema

$t_r := 0.7s$ - tempo médio de reação

$a_f := -6\dfrac{m}{s^2}$ - desaceleração do carro

$v_{01} := 30\dfrac{km}{hr}$ - velocidade inicial do carro

$v_{02} := 60\dfrac{km}{hr}$ - idem

$v_{03} := 90\dfrac{km}{hr}$ - idem

$L := 3m$ - comprimento do carro

Pede-se

$x_{min} = ?$ - distância mínima percorrida até parar

$\alpha(x_{min}) := \dfrac{x_{min}}{L}$ - relação da distância com o comprimento do carro

Solução

O tempo t que decorre entre o motorista avistar o perigo até o carro parar contém dois termos: o tempo de reação t_r mais o tempo gasto para desacelerar o carro, após aplicar os freios, t_f.. Assim,

$$t = t_f + t_r$$

O tempo de freagem pode ser calculado facilmente e depende da velocidade inicial que o carro tenho no momento em que os freios forem aplicados. Matematicamente, esses intervalos podem ser calculados a partir da equação

$$v = v_0 + a\cdot t$$

Neste problema, temos três casos:

Given $0 = v_{01} + a_f\cdot t$ $\quad t_{f1} := \mathrm{Find}(t) \rightarrow 5\cdot\dfrac{km}{m\cdot hr}\cdot s^2$ $\quad t_{f1} = 1.389\,s$

Given $0 = v_{02} + a_f\cdot t$ $\quad t_{f2} := \mathrm{Find}(t) \rightarrow 10\cdot\dfrac{km}{m\cdot hr}\cdot s^2$ $\quad t_{f2} = 2.778\,s$

Given $0 = v_{03} + a_f\cdot t$ $\quad t_{f3} := \mathrm{Find}(t) \rightarrow 15\cdot\dfrac{km}{hr\cdot m}\cdot s^2$ $\quad t_{f3} = 4.167\,s$

Logo, o tempo total que o carro gasta até parar, desde o momento o motorista avistou o perigo, em cada caso, é:

Para $v_0 = 30\dfrac{km}{hr}$ $\quad t_{30} := t_{f1} + t_r$ >> $t_{30} = 2.089\,s$

Para $v_0 = 60\dfrac{km}{hr}$ $\quad t_{60} := t_{f2} + t_r$ >> $t_{60} = 3.478\,s$

Para $v_0 = 90\dfrac{km}{hr}$ $\quad t_{90} := t_{f3} + t_r$ >> $t_{90} = 4.867\,s$

continua >>

<< Continuação do Problema 7 >>

A distância mínima percorrida, em cada caso, é a soma de dois termos: (1) distância percorrida do momento que o motorista avistou o perigo até pisar nos freios; e (2) a distância percorrida enquanto os freios eram aplicados. O primeiro termo corresponde a um MU e o segundo, MRUV. Para este, tem-se

Given $0 = v_{01}^2 + 2 \cdot a_f \cdot x$ $\quad x_1 := \text{Find}(x) \rightarrow 75 \cdot \frac{km^2}{hr^2 \cdot m} \cdot s^2$ >> $x_1 = 5.8\,m$

Given $0 = v_{02}^2 + 2 \cdot a_f \cdot x$ $\quad x_2 := \text{Find}(x) \rightarrow 300 \cdot \frac{km^2}{hr^2 \cdot m} \cdot s^2$ >> $x_2 = 23.1\,m$

Given $0 = v_{03}^2 + 2 \cdot a_f \cdot x$ $\quad x_3 := \text{Find}(x) \rightarrow 675 \cdot \frac{km^2}{hr^2 \cdot m} \cdot s^2$ >> $x_3 = 52.1\,m$

A distância mínima pode então ser calculada:

Para $v_0 = 30 \frac{km}{hr}$ $\quad x_{min} := v_{01} \cdot t_r + x_1$ >> $x_{min} = 11.6\,m$ >> $\alpha(x_{min}) = 3.9$

Para $v_0 = 60 \frac{km}{hr}$ $\quad x_{min} := v_{02} \cdot t_r + x_2$ >> $x_{min} = 34.8\,m$ >> $\alpha(x_{min}) = 11.6$

Para $v_0 = 90 \frac{km}{hr}$ $\quad x_{min} := v_{03} \cdot t_r + x_3$ >> $x_{min} = 69.6\,m$ >> $\alpha(x_{min}) = 23.2$

Problema 8

O sinal amarelo num cruzamento fica ligado durante 3s. A largura do cruzamento é de 15m. A aceleração máxima de um carro que se encontra a 30m do cruzamento quando o sinal muda para amarelo é de 3m/s ^{2} e ele pode ser freiado a 5m/s^2. Que velocidade mínima o carro precisa ter na mudança do sinal para amarelo a fim de que possa atravessar no amarelo? Qual é a velocidade máxima que ainda lhe permite parar antes de atingir o cruzamento?

Dados do problema

$t_a := 3s$ (tempo de duração do sinal amarelo)

$L_c := 15m$ (largura do cruzamento)

$a_c := 3\frac{m}{s^2}$ (aceleração máxima do carro)

$a_f := -5\frac{m}{s^2}$ (desaceleração máxima dos freios)

$d := 30m$ (distância do carro ao cruzamento

Pede-se

(a) v_{min} = ? (velocidade mínima)

(b) $v_{máx}$ = ? (velociadade máxima

Análise do problema

Neste problema, temos que considerar dois casos: (1) sem levar em conta o tempo de reação do motorista; e (2) levando em conta este tempo ($t_r := 0.7s$).

(a) Velocidade mínima
(1) Para calcular a velocidade mínima necessária para que o carro atravesse o cruzamento, sem levar em conta o tempo de reação (t_r = 0), o carro terá que percorrer uma distância $x_1 := L_c + d$, no intervalo de tempo correspondente à duração do sinal amarelo ($t_1 := t_a$).

(2) Levando em conta o tempo de reação do motorista, o tempo que o carro dispõe para percorrer a distância $x_2 = x_1 - v_0 \cdot t_r$, atravesando o cruzamento no intervalo de tempo, que é, neste caso, $t_2 := t_a - t_r$.

(b) Velocidade máxima
(1) A velocidade máxima que o carro deve ter para que o motorista consiga pará--lo antes de atravessar o cruzamento, pode ser calculada lembrando que o carro terá que percorrer a distância *d* no tempo de duração do sinal amarelo ($t_1 = 3\,s$).

(2) O tempo aqui será $t_2 := t_a - t_r$.

Solução

(a-1) Velocidade mínima sem tempo de reação (t_r=0)

De acordo com a análise, temos:

Given $x_1 = v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} a_c t_1^2$ onde $x_1 = 45\,m$, $a_c = 3\frac{m}{s^2}$ e $t_1 = 3\,s$, encontra-se

$$v_{min} := \mathrm{Find}(v_0) \rightarrow \frac{21}{2} \cdot \frac{m}{s}$$

Assim.

$v_{min} = 10.5\frac{m}{s}$ ou $\boxed{v_{min} = 37.8\frac{km}{hr}}$

(a-2) Velocidade mínina com tempo de reação

De maneira análoga,

Given $x_1 - v_0 \cdot t_r = v_0 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a_c \cdot t_2^{\ 2}$ $\quad v_{min} := \mathrm{Find}(v_0) \rightarrow 12.355000000000000000 \cdot \frac{m}{s}$

Assim,

$v_{min} = 12.355 \frac{m}{s}$ ou $\boxed{v_{min} = 44.5 \frac{km}{hr}}$

(b-1) Velocidade máxima sem tempo de reação ($t_r = 0$)

Aqui nós temos $v := 0$ e $x_1 := d$. Logo,

Given $v^2 = v_0^{\ 2} + 2 \cdot a_f \cdot x_1$

$$v_0 := \mathrm{Find}(v_0) \rightarrow \begin{pmatrix} 10 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{m}{s} & -10 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{m}{s} \end{pmatrix}$$

Portanto, $v_{max} := 10 \cdot \sqrt{3} \frac{m}{s}$

ou

$\boxed{v_{max} = 62.4 \frac{km}{hr}}$

(b-2) Velocidade máxima com tempo de reação ($t_r = 0.7\,s$)

Antes de aplicar os freios, o carro já terá percorrido uma distância $v_0 t_r$, restando apenas uma distância $x_1 = d - v_0 \cdot t_r$, para parar. Logo,

Given

$$0 = v_0^{\ 2} + 2 \cdot a_f \cdot (d - v_0 \cdot t_r)$$

$$\mathrm{Find}(v_0) \rightarrow \left[\left(\frac{-7}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1249^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \frac{m}{s} \quad \left(\frac{-7}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1249^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \frac{m}{s} \right]$$

Portanto, $v_{max} := \left(\frac{-7}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1249} \right) \frac{m}{s}$

Assim,

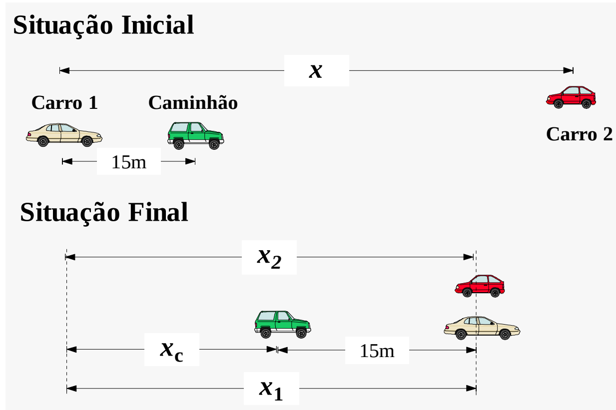
$v_{max} = 14.2 \frac{m}{s}$

ou

$\boxed{v_{max} = 51 \frac{km}{hr}}$

Problema 9

Numa rodovia de mão dupla, um carro encontra-se 15m atrás de um caminhão (distância entre pontos médios), ambos trafegando a 80km/h. O carro tem uma aceleração máxima de 3m/s 2. O motorista deseja ultrapassar o caminhão e voltar para sua mão 15m adiante do caminhão. No momento em que cameça a ultrapassagem, avista um carro que vem vindo em sentido oposto, também a 80km/h. A que distância mínima precisa estar do outro carro para que a ultrapassagem seja segura?



Dados do problema

Carro 1:

$$v_{01} := 80 \frac{km}{hr}$$

$$x_{01} := 0km$$

$$a_1 := 3 \frac{m}{s^2}$$

Caminhão:

$$v_c := 80 \frac{km}{hr}$$

$$x_{0c} := 15m$$

Carro 2:

$$v_2 := -80 \frac{km}{hr}$$

Pede-se

$x_{min} = ?$ (distância mínima entre os carros 1 e 2 para que haja a ultrapassagem nas condições indicadas)

Análise do problema

Ao final da ultrapassagem, os carros 1 e 2 devem ter a mesma posiçao em relação à origem, que foi tomada como sendo a posição inicial do carro 1 (ver figura acima). Além disto, como condição exigida, a posição do carro 1 deve exceder em 15m a posição do caminhão.

Solução

A posição de cada um no instante t é:

$$x_1(t) := x_{01} + v_{01} \cdot t + \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2, \qquad x_2(x_{min}, t) := x_{min} + v_2 \cdot t, \qquad x_c(t) := x_{0c} + v_c \cdot t$$

Usando a condição de ultrapassagem temos

$$\text{Given} \quad x_1(t) = x_c(t) + 15m \qquad t_{ans} := \text{Find}(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot s & -2 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot s \end{pmatrix}$$

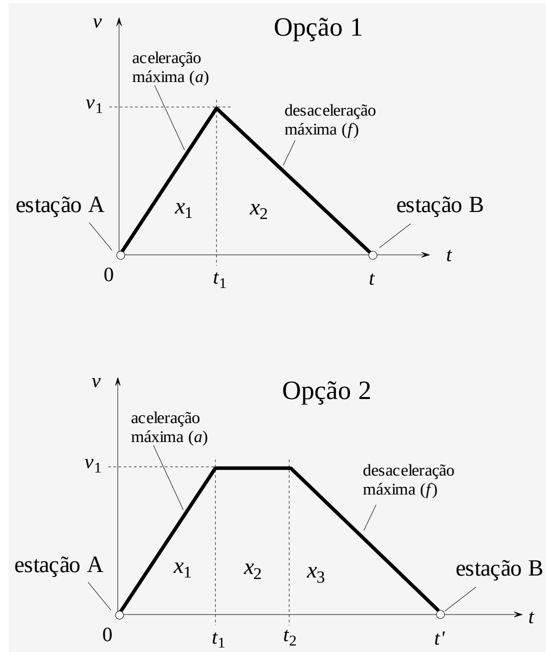
Logo, o tempo de ultrapassagem será de $t := t_{ans}^{\langle 1 \rangle}$ ou $t = (4.472)\,s$. Para que a outeja satisfeita, é necessário que a distância mínima entre os carros seja:

$$\text{Given} \quad x_1(t) = x_2(x_{min}, t) \qquad x_{min} := \text{Find}(x_{min})$$

Logo, $x_{min} = 228.8\,m$

Problema 10

Um trem com aceleração máxima *a* e desaceleração máxima *f* (magnitude da aceleração de freamento) tem de percorrer uma distância *d* entre duas estações. O maquinista pode escolher entre (a) seguir com a aceleração máxima até certo ponto e a partir daí frear com a desaceleração máxima, até chegar; (b) acelerar até uma certa velocidade, mantê-la constante durante algum tempo e depois fear até a chegada. Mostre que a primeira opção é a que minimiza o tempo do percurso **(sugestão:** utilize gráficos *v* x *t*) e calcule o tempo mínimo de percurso em função de *a*, *f* e *d*.



Dados do problema

d - distância entre duas estações
a - aceleração máxima
f - desaceleração máxima

Pede-se

t_{min} = ? (tempo mínimo de percurso)

Análise do problema

Opção 1 O motorista acelera a partir da estação A até o instante t_1 com aceleração máxima *a* e depois desacelera (com a_f) até parar na estação B no instante t (ver figura a).

Opção 2 O motorista, partindo da estação A, acelera até o instante t_1, onde atinge a velocidade v_1, mantendo esta velocidade até o instante t_2 e desacelera até parar na estação B no instante t (ver figura b).

Solução

$$v(v_0,a,t) := v_0 + a\cdot t \qquad x(v_0,a,t) := v_0\cdot t + \frac{1}{2}a\cdot t^2$$

Limpando as variáveis:
$t_1 := ■ \quad t_2 := ■ \quad t := ■ \quad a := ■$

OPÇÃO 1 Vamos começar calculando tempo através da opção 1:

Given

$$x(0,a,t_1) + x(a\cdot t_1,-f,t-t_1) = d \qquad v(a\cdot t_1,-f,t-t_1) = 0$$

$$F(d,a,f) := \mathrm{Find}(t,t_1)\ \mathrm{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{[a\cdot(a+f)\cdot d\cdot f]^{\frac{1}{2}}}{f} & \dfrac{-1}{a}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{[a\cdot(a+f)\cdot d\cdot f]^{\frac{1}{2}}}{f} \\ \dfrac{1}{a\cdot(a+f)}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot[a\cdot(a+f)\cdot d\cdot f]^{\frac{1}{2}} & \dfrac{-1}{a\cdot(a+f)}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot[a\cdot(a+f)\cdot d\cdot f]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

O tempo gasto é portanto,

$$t = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{a\cdot(a+f)\cdot d\cdot f}}{a\cdot(a+f)}$$ que pode ser reescrito como $$t = \sqrt{2\frac{d}{a}\left(1+\frac{a}{f}\right)}$$

Problema 11

Você quer treinar para malabarista, mantendo duas bolas no ar, e suspendendo-as até uma altura máxima de 2m. De quanto em quanto tempo e com que velocidade tem de mandar as bolas para cima?

Dados do problema

$h := 2m$ (altura de lançamento)

$v_h := 0$ (velocidade na altura h)

$g := 9.8\frac{m}{s^2}$ (aceleração da gravidade)

Pede-se

v_0 = ? (velocidade de lançamento)

Δt = ? (intervalo de tempo entre dois lançamentos)

[redacted]

Limpando as variáveis

$v_0 :=$ ▮ $\Delta t :=$ ▮

Solução

Velocidade para a bola alcançar a altura h:

$$v = v_0^2 - 2\cdot g\cdot h \quad >> \quad v_0 := \sqrt{2\cdot g\cdot h}$$

ou $v_0 = (17.3 \quad -17.3)\frac{m}{s}$

O intervalo de tempo entre os lançamentos correspondente à duração do movimento de subida (ou de descida) de uma das bolas. Usando a fórmula para a posição z da bola em qualquer instante:

$$z(t) = v_0\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

Fazendo z(t) = 0 nesta equação, encontra-se o tempo que a bola leva para subir e descer. Assim

Given

$$0 = v_0\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

$$(t_1 \quad t_2) := \text{Find}(t) \rightarrow \left[0 \quad 1.2777531299998798265\cdot\left(\frac{m^2}{s^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{s^2}{m}\right]*$$

ou

$t_1 =$ ▮ e $t_2 =$ ▮

As duas soluções correspondem ao instante de lançamento ($t_1 =$ ▮) e quando retorna ($t_2 =$ ▮). Como o tempo de subida é igual ao tempo de descida, então, para manter o máximo de tempo as duas bolas no ar, o lançamento da segunda bola deve ser feito quando a primeira está em sua altura máxima, isto é,

$$t_s := \frac{t_2}{2} \quad \text{ou} \quad t_s = ▮$$

o que nos fornece um intervalo de tempo entre os lançamentos igual a $\Delta t := t_s$ ou $\Delta t =$ ▮

Problema 12

Um método possível para medir a aceleração da gravidade *g* consiste em lançar uma bolinha para cima num tubo onde se fez vácuo e medir com precisão os instantes t_1 e t_2 de passagem (na subida e na descida, respectivamente) por uma altura z conhecida, a partir do instante do lançamento. Mostre que

$$g = 2\cdot\frac{z}{t_1\cdot t_2}$$

Dados do problema

z (altura onde se realiza a medida)

t_1 (instante em que a bola passa por z na subida)

t_2 (instante em que a bola passa por z na descida)

Pede-se

g = ? (aceleração da gravidade)

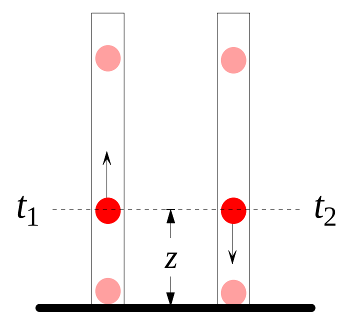
Limpando as variáveis

$z :=$ ▮ $v_0 :=$ ▮ $g :=$ ▮ $t :=$ ▮ $t_s :=$ ▮ $t_d :=$ ▮

Solução

A equação horária é dada por:

$$y(v_0, g, t) := v_0\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$



A figura ao lado ilustra a experiência. Sabendo que a bolinha passa pelo ponto z nos dois instantes de tempo, então

Given

$$y(v_0, g, t_1) = z$$

$$F(z, g, t_1) := \text{Find}(v_0) \ \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{g\cdot t_1^{\,2} + 2\cdot z}{t_1}$$

ou seja

$$v_0 := \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(g\cdot t_1^{\,2} + 2\cdot z\right)}{t_1}$$

Da mesma forma:

Given

$$y\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(g\cdot t_1^{\,2} + 2\cdot z\right)}{t_1}, g, t_2\right] = z$$

$$g(z, t_1, t_2) := \text{Find}(g) \ \rightarrow 2\cdot\frac{z}{t_1\cdot t_2}$$

Ou seja:

$$g = 2\cdot\frac{z}{t1\cdot t2}$$

Problema 13

Uma bola de vôlei impelida verticalmente para cima, a partir de um ponto próximo do chão, passa pela altura da rede 0,3s depois, subindo, e volta a passar por ela, descendo, 1,7s depois do arremesso. (a) Qual é a velocidade inicial da bola? (b) Até que altura máxima ela sobe? (c) Qual é a altura da rede?

Limpando as variáveis

$h :=$ ▪ $\quad v_0 :=$ ▪ $\quad g :=$ ▪ $\quad t :=$ ▪ $\quad t_s :=$ ▪ $\quad t_d :=$ ▪

Dados do problema

$t_s := 0.3s$ (tempo para passar pela altura da rede na subida)

$t_d := 1.7 \cdot s$ (tempo para passar pela altura da rede na descida)

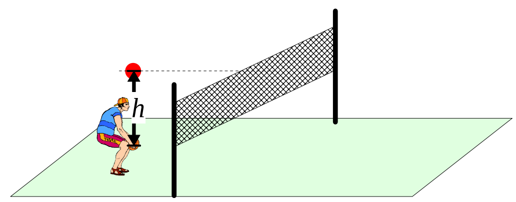
$g := 9.8 \dfrac{m}{s^2}$

Pede-se

v_0 = ? (velocidade inicial da bola)

h = ? (altura da rede)

(ver figura abaixo)



Solução

Equações do movimento

$v(t) = v_0 - g \cdot t \qquad y(t) = v_0 \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

Sabe-se que: $\quad y(t_s) = y(t_d) = h$

Então

Given $\qquad v_0 \cdot t_s - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t_s^{\,2} = h \qquad v_0 \cdot t_d - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t_d^{\,2} = h$

$$\text{Find}(h, v_0) \rightarrow \begin{pmatrix} 2.4990000000000000000 \cdot m \\ 9.8000000000000000000 \cdot \dfrac{m}{s} \end{pmatrix}$$

Assim,

$\boxed{h := 2.5 \cdot m} \qquad \boxed{v_0 := 9.8 \cdot \dfrac{m}{s}}$

Para calcular a altura máxima (h_{max}) que a bola sobe, vamos usar a equação de Torricelli:

$v^2 = v_0^{\,2} - 2g \cdot h_{max} \qquad$ Então

Given

$$0 = v_0^{\,2} - 2g \cdot h_{max}$$

$$h_{max} := \text{Find}(h_{max}) \rightarrow 4.9000000000000000000 \cdot m$$

Portanto, $\quad \boxed{h_{max} = 4.9\,m}$

Problema 14

Deixa-se cair uma pedra num poço profundo. O barulho da queda é ouvido 2s depois. Sabendo que a velocidade do som no ar é de 330m/s, calcule a profundidade do poço.

Limpando as variáveis

$h :=$ ▮ $\quad v_0 :=$ ▮ $\quad t :=$ ▮ $\quad t_s :=$ ▮ $\quad t_p :=$ ▮

Dados do problema

$v_s := 330\frac{m}{s}$ (velocidade do som)

$t := 2s$ (tempo decorrido até se ouvir o barulho)

$v_0 := 0$

Pede-se

h = ? (profundidade do poço)

Solução

Equações do movimento para a pedra

$$z(t) := v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \qquad v(t) := v_0 + g \cdot t$$

Para o som

$$z_s(t) := v_s \cdot t$$

Supondo que a pedra tenha levado um tempo t_p para atingir o fundo (de profundidade h) e que o som gaste um tempo t_s para percorrer o caminho de volta, o tempo total será a soma dos dois, e vale $t = 2s$ Assim, da condição $t_p + t_s = t$, encontra-se:

Given

$$t_p + t_s = t \qquad z(t_p) = h \qquad z_s(t_s) = h$$

$$\begin{pmatrix} h \\ t_p \\ t_s \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(h, t_p, t_s) \rightarrow \begin{pmatrix} 18.515705165688364399 \cdot m & 23525.974090752678983 \cdot m \\ 1.9438918025282170776 \cdot s & -69.290830578038421159 \cdot s \\ 5.6108197471782922422 \cdot 10^{-2} \cdot s & 71.290830578038421159 \cdot s \end{pmatrix}$$

Então, a solução é:

$$\boxed{h := 18.5m} \qquad t_p := 1.94s \qquad t_s := 0.056s$$

Problema 15

Um vaso com plantas cai do alto de um edifício e passa pelo 3º andar, situado 20m acima do chão, 0,5s antes de se espatifar no chão. (a) Qual é a altura do edifício? (b) Com que velocidade (em m/s e em km/h) o vaso atinge o chão?

Limpando as variáveis

$h :=$ ▮ $\quad v_0 :=$ ▮ $\quad t :=$ ▮ $\quad t_2 :=$ ▮ $\quad t_q :=$ ▮ $\quad v_c :=$ ▮

Dados do problema

$h_1 := 20\text{m}$

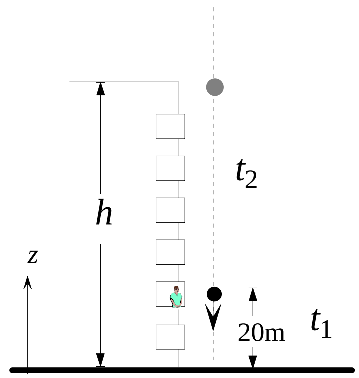
$t_1 := 0.5\text{s}$

$g := -9.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ $\qquad$ assume, $v_1 < 0$

Pede-se

(a) h = ? (altura do edifício)

(b) v_c = ? (velocidade ao atingir o chão)



O tempo de queda (t_q) será a soma de dois termos: $t_1 + t_2$. Assim,

$$t_q = t_1 + t_2$$

Given

$t_q = t_1 + t_2$ - tempo de queda

$v_1 = g \cdot t_2$ - velocidade em t_2

$h_1 = h + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^{\,2}$ - altura h_1

$0 = h + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_q^{\,2}$ - chega ao chão (z = 0)

$$\text{Find}(h, v_1, t_2, t_q) \rightarrow \begin{pmatrix} 91.938903061224489796 \cdot \text{m} \\ -37.550000000000000000 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 3.8316326530612244898 \cdot \text{s} \\ 4.3316326530612244898 \cdot \text{s} \end{pmatrix}$$

Assim, encontramos:

$h := 92\text{m}$ e $t_q := 4.3\text{s}$

Com o valor de t_q podemos calcular a velocidade final: $v_c := g \cdot t_q$

Logo, $v_c = -42\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ou $\boxed{v_c = -152\,\frac{\text{km}}{\text{hr}}}$

Problema 16

Um foguete para pesquisas metereológicas é lançado verticalmente para cima. O combustível, que lhe imprime uma aceleração 1,5g (g = aceleração da gravidade) durante o período de queima, esgota-se após 0,5min. (a) Qual seria a altitude máxima atingida pelo foguete se pudéssemos desprezar a resistência do ar? (b) Com que velocidade (em m/s e km/h), e depois de quanto tempo ele voltaria a atingir o solo?

Limpando as variáveis

$h_1 :=$ ▪ $h_2 :=$ ▪ $h :=$ ▪ $t_1 :=$ ▪ $t_2 :=$ ▪ $t_q :=$ ▪ $v_1 :=$ ▪

Dados do problema

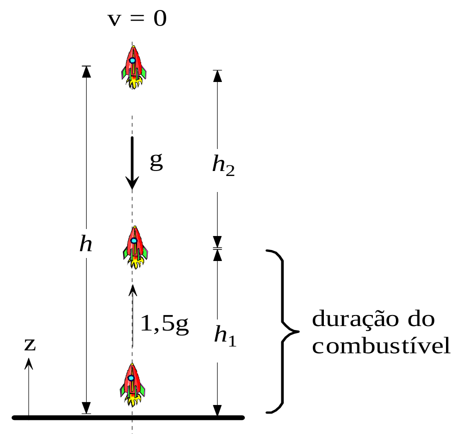
$g := -9.8\frac{m}{s^2}$ (aceleração da gravidade)

$a := 1.5\cdot|g|$ (aceleração devido à queima de combustível)

$t_1 := 30s$ (duração da queima)

Pede-se

h = ? (altitude máxima)
v = ? (velocidade com que chega ao solo)
t = ? (tempo que gasta para retornar ao solo)



Solução

Para o trecho com combustível (até z = h_1 e t = 30s)

Given

$$h_1 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t_1^2 \quad \text{(combustível)}$$

$$v_1 = a\cdot t_1$$

$$h_2 = v_1\cdot t_2 + \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_2^2$$

$$0 = v_1 + g\cdot t_2$$

$$\text{Find}(h_1, h_2, v_1, t_2) \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 6615.\cdot\text{abs}\left(\frac{m}{s^2}\right)\cdot s^2 \\ 9922.5000000000000000\cdot\text{abs}\left(\frac{m}{s^2}\right)^2\cdot\frac{s^4}{m} \\ 441.\cdot\text{abs}\left(\frac{m}{s^2}\right)\cdot s \\ 45.\cdot\text{abs}\left(\frac{m}{s^2}\right)\cdot\frac{s^3}{m} \end{pmatrix}$$

Ou seja:

$h_1 := 6615m$ $h_2 := 9922.5m$ $t_2 := 45s$

Então, $h := h_1 + h_2 \rightarrow 16537.5\cdot m$

Além disto, $v_{solo} := \sqrt{2\cdot|g|\cdot h}$ e, portanto $\boxed{v_{solo} = 569\frac{m}{s}}$ ou $\boxed{v_{solo} = 2.05\times 10^3\frac{km}{hr}}$