O que vamos estudar?

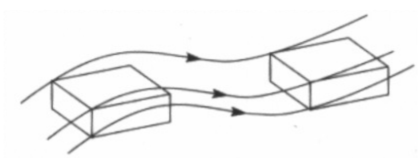
11.1 Cinemática do corpo rígido

- **Corpo rígido** Chama-se *corpo rígido* ao corpo cuja distância entre duas partículas quaisquer permanece invariável. Na prática, não existe um corpo perfeitamente rígido, sendo esta definição apenas um conceito limite ideal de um corpo indeformável, independentemente das forças nele aplicadas.

Movimentos de um corpo rígido

Movimento de translação

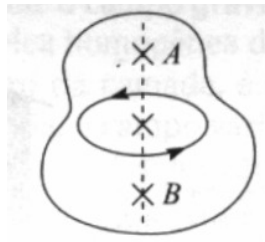
- **Movimento de translação** Corresponde ao movimento em que a direção de qualquer segmento que une dois de seus pontos não se altera. Como consequência da definição de corpo rígido, neste movimento todos os pontos descrevem curvas paralelas, isto é, curvas que podem se superpostas por uma translação.
- Para estudar o movimento de translação de um corpo rígido, basta estudá-lo para qualquer um de seus pontos. Então o movimento de translação de um corpo rígido reduz ao movimento de um único ponto material.



Translação de um corpo rígido.

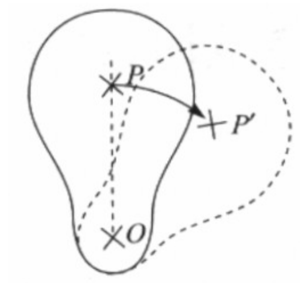
Movimento de Rotação

- **Movimento de rotação em torno de um eixo fixo** Em consequência da definição de corpo rígido, fixando-se dois de seus pontos, A e B, equivale a fixar todos os pontos da reta definida por AB (pois todos estes pontos têm que manter inalteradas suas distância de A e de B). Por outro lado, qualquer partícula fora desta reta tem que manter inalterada sua distância ao eixo AB. Logo, AB é um eixo de rotação, em relação ao qual todas as partículas descrevem círculos com centros sobre o eixo.



Rotação em torno de um eixo fixo.

- Neste caso, o movimento pode ser descrito em termos de uma única coordenada: o ângulo de rotação.
- **Rotação em torno de um ponto fixo** Fixando-se um único ponto O do corpo, qualquer ponto P situado a uma distância r de O tem de mover-se sobre a superfície de uma esfera de raio r com centro em O.



Rotação em torno de um ponto fixo.

- Para descrevermos o movimento de corpo rígido em torno de um ponto fixo O precisamos de duas coordenadas, que podem ser os ângulos de *latitude* e *longitude* de um ponto P sobre a superfície da esfera.

Como fixar a posição de um corpo rígido?

- Vimos que, ao fixarmos *um ponto* de um corpo rígido, qualquer outro ponto só pode descrever um movimento de rotação em torno daquele ponto fixo.
- Por outro lado, fixando-se *dois pontos* de um corpo rígido, qualquer outro ponto fora do eixo definido pela reta que passa por esses dois pontos, só pode descrever um movimento de rotação em torno deste eixo.
- Agora podemos demonstrar que fixando-se as posições de *três pontos não colineares* fica fixada a posição do corpo rígido. De fato, fixando-se dois pontos A e B, fixamos o eixo AB; um ponto C não colinear (fora do eixo AB) só poderia descrever um movimento circular em torno do eixo AB. Logo, fixando-se a posição deste ponto, conhecemos também a posição de todos os outros pontos do corpo rígido, ou seja, conhecemos a posição do próprio corpo rígido.

Qual é o movimento mais geral de um corpo rígido?

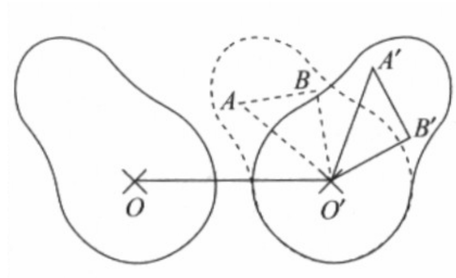
Teorema de Chasles O movimento mais geral de um corpo rígido se compõe de uma translação e uma rotação.

Prova Suponha que o corpo tenha se deslocado entre as posições mostradas na figura pelas linhas cheias. Neste movimento, podemos considerar que:

- (1) *O corpo tenha se deslocado inicialmente através de uma translação definida pelo vetor* $\mathbf{OO}'$, *levando à posição intermediária representada na figura pela linha interrompida*.
- (2) *Sejam* A *e* B *duas outras partículas do corpo nesta posição, não colineares com* O; *as correspondentes partículas* A' *e* B' *na posição final do corpo têm de ser tais que os triângulos* $O'AB$ *e* $O'A'B'$ *sejam iguais, pois os*

lados correspondentes são iguais, pela rigidez do corpo. Logo, estes triângulos podem ser superpostos por uma rotação em torno do ponto fixo comum O'.

- (3) *Uma vez fixados os três pontos não colineares* O', A' *e* B' *fica fixada a posição do corpo rígido, o que demonstra o resultado.*



Teorema de Chasles.

Graus de Liberdade

Chamam-se *graus de liberdade de um sistema* os parâmetros que são necessários fixar para especificar a posição de um sistema.

Graus de liberdade de um corpo rígido

Quantos parâmetros precisamos dar para especificar completamente a posição de um corpo rígido em relação a um dado referencial?

- Já vimos que, para especificar a posição de um corpo rígido precisamos fixar três pontos, por exemplo, P, A e B. Então:
- (1) Para especificar a posição do primeiro ponto (P) precisamos de 3 coordenadas;
- (2) Tendo fixado o ponto P, precisamos de mais 2 coordenadas para fixar a posição do segundo ponto (A) sobre uma esfera de raio r (distância entre os pontos P e A).
- (3) Fixados os pontos P e A, qualquer outro ponto (B) tem que estar sobre o círculo com centro no eixo PA e sua posição pode ser especificada por mais uma coordenada (ângulo de rotação em torno do eixo).
- Logo, precisamos de $3+2+1=6$ coordenadas para especificar completamente a posição de um corpo rígido.
- Dizemos que um corpo rígido tem 6 graus de liberdade.
- *Este resultado para o corpo rígido permite associar* 3 *graus de liberdade (dos seis) à translação e os outros* 3 *à rotação*.
- **Corpo rígido com um ponto fixo** Possui 3 graus de liberdade associados à rotação em torno desse ponto.
- **Corpo rígido com dois pontos fixos** Possui 1 grau de liberdade associado à rotação em torno do eixo definido por estes dois pontos.

Graus de liberdade de uma partícula

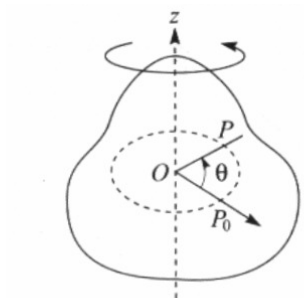
- **Partícula livre** Uma partícula livre tem 3 graus de liberdade correspondentes às três coordenadas que precisamos para especificar sua posição.
- **Partícula sobre uma superfície** Possui 2 graus de liberdade
- **Partícula so um fio** Possui 1 grau de liberdade.

Graus de liberdade de um sistema de N partículas

- Um sistema de N partícular tem $3N$ graus de liberdade correspondentes às $3N$ coordenadas que precisamos para especificar as posições das N partícuas.

11.3 Representação vetorial das rotações

- O movimento mais simples de rotação de um corpo rígido é o de *rotação em torno de um eixo*.



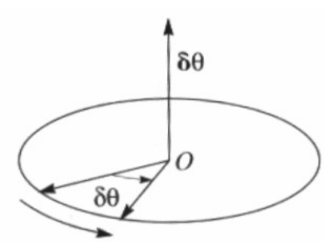
Ângulo de rotação.

- O sistema possui apenas 1 grau de liberdade – ângulo de rotação θ de um ponto P em torno do eixo.
- **Eixo fixo** A rotação pode ser descrita por uma grandeza escalar (ângulo θ).
- **Caso geral** Quando o eixo não é fixo (e.g. movimento do pião) precisamos tanto do ângulo como da direção do eixo de rotação.
- **Rotações finitas** As rotações por ângulos θ finitos não podem ser consideradas como vetores, pois a adição dessas rotações não é comutativa (cf. Seç. 3.2.5).
- **Rotações infinitesimais** No caso de rotações por ângulos $\delta\theta$ infinitésimos são comutativas e *têm caráter vetorial.*

Vetor associado a uma rotação infinitesimal

Seja $\boldsymbol{\delta\theta}$ o vetor associado a uma rotação infinitesimal.

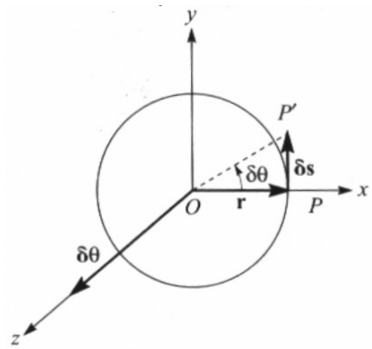
- Magnitude O módulo do vetor $\boldsymbol{\delta\theta}$ representa o ângulo de rotação.
- Direção A direção do vetor $\boldsymbol{\delta\theta}$ é a direção do eixo de rotação.
- Sentido Não há nenhuma propriedade física que permita associar um sentido ao vetor $\boldsymbol{\delta\theta}$. Convenção A convenção adotada é a regra da mão direita.



Convenção da orientação.

Deslocamento de um ponto em rotação infinitesimal

- A figura mostra a seção transversal de um corpo (que tomanos como plano $x-y$) em rotação em torno de um eixo perpendicular a esta seção (eixo z).



- Deslocamento de um ponto P da seção transversal

$$\delta s = r\delta\theta$$

- Qual a relação entre o deslocamento vetorial $\boldsymbol{\delta}\mathbf{s}$ com $\boldsymbol{\delta\theta}$ e $\mathbf{r}$?
- Esta relação é dada por um novo tipo de produto de vetores, *o produto vetorial*

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{s} = \boldsymbol{\delta\theta} \times \mathbf{r}$$

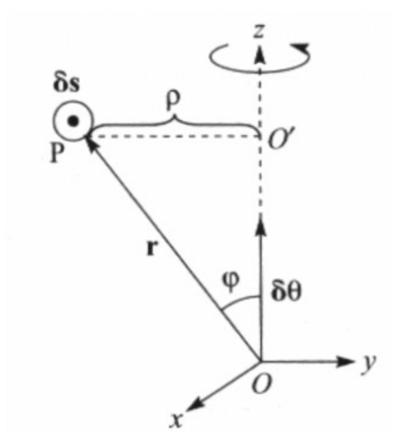
- Módulo de $\boldsymbol{\delta}\mathbf{s}$ Neste caso em que $\boldsymbol{\delta\theta} \perp \mathbf{r}$, o módulo de $\boldsymbol{\delta}\mathbf{s} = \boldsymbol{\delta\theta} \times \mathbf{r}$

$$|\boldsymbol{\delta}\mathbf{s}| = |\boldsymbol{\delta\theta}|\,|\mathbf{r}|$$

- Direção de $\boldsymbol{\delta}\mathbf{s}$ A direção de $\boldsymbol{\delta}\mathbf{s} = \boldsymbol{\delta\theta} \times \mathbf{r}$ é perpendicular ao plano definido pelas direções de $\boldsymbol{\delta\theta}$ e $\mathbf{r}$.
- **Caso geral** No caso mais geral, em que $\boldsymbol{\delta\theta}$ e $\mathbf{r}$ não são perpendiculares entre si, o módulo de $\boldsymbol{\delta}\mathbf{s} = \boldsymbol{\delta\theta} \times \mathbf{r}$ é dado por

$$|\boldsymbol{\delta}\mathbf{s}| = |\boldsymbol{\delta\theta}|\,|\mathbf{r}|\ \operatorname{sen}\varphi$$

onde φ é o ângulo entre as direções de $\boldsymbol{\delta\theta}$ e $\mathbf{r}$.



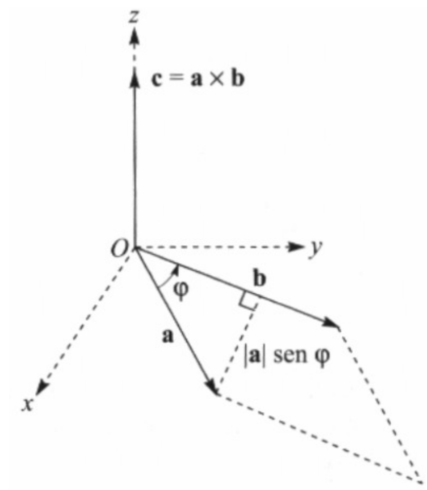
Magnitude do produto vetorial.

Produto vetorial

Definição O produto vetorial $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é definido como:

- Direção perpendicular ao plano definido por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.
- Sentido regra da mão direita.
- Módulo dado por

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\ \operatorname{sen}\varphi$$



Interpretação geométrica.

- Área de paralelogramo Observe que o módulo do produto vetorial pode também ser interpretado como a área do paralelogramo construído sobre os dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.
- Como consequência da definição

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

  ou seja, o produto vetorial é *anti-comutativo*.
- Quando os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são paralelos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$$

- Em particular

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$$

Produto vetorial dos vetores unitários

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\,\mathbf{j} \times \mathbf{i}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\,\mathbf{k} \times \mathbf{j}$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\,\mathbf{i} \times \mathbf{k}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

O produto vetorial é distributivo

- Ou seja

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

- Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})\\
&= a_xb_x\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k}+\\
&\quad + a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i}+a_yb_y\mathbf{j}\times\mathbf{j}+a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k}+\\
&\quad + a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i}+a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j}+a_zb_z\mathbf{k}\times\mathbf{k}\\
&= (a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

que pode ser reescrito com a ajuda do determinante

$$
\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
$$

As rotações infinitesimais são comutativas

- Considere o deslocamento de um ponto P de vetor de posição $\mathbf{r}$, como resultante de duas rotações infinitesimais sucessivas (em torno de eixos que podem ter diferentes direções). Assim,

$$
\boldsymbol{\delta}\mathbf{s}_1 = \boldsymbol{\delta\theta}_1\times\mathbf{r},\quad \boldsymbol{\delta}\mathbf{s}_2 = \boldsymbol{\delta\theta}_2\times\mathbf{r}
$$

- Sabemos que os deslocamentos são vetores e, portanto,

$$
\boldsymbol{\delta}\mathbf{s} = \boldsymbol{\delta}\mathbf{s}_1+\boldsymbol{\delta}\mathbf{s}_2 = \boldsymbol{\delta\theta}_1\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta\theta}_2\times\mathbf{r} = (\boldsymbol{\delta\theta}_1+\boldsymbol{\delta\theta}_2)\times\mathbf{r} = \boldsymbol{\delta\theta}\times\mathbf{r}
$$

- Logo, a rotação infinitesimal resultante $\boldsymbol{\delta\theta}$ é dada pela soma vetorial

$$
\boldsymbol{\delta\theta} = \boldsymbol{\delta\theta}_1+\boldsymbol{\delta\theta}_2.
$$

Velocidade angular

- Partindo da definição, a velocidade instantânea de um ponto que tem um deslocamento infinitesimal $\boldsymbol{\delta}\mathbf{s}$ durante um intervalo de tempo infinitesimal δt é dada por

$$
\mathbf{v} = \lim_{\delta t\to 0}\left(\frac{\boldsymbol{\delta}\mathbf{s}}{\delta t}\right) = \lim_{\delta t\to 0}\left(\frac{\boldsymbol{\delta\theta}\times\mathbf{r}}{\delta t}\right) = \lim_{\delta t\to 0}\left(\frac{\boldsymbol{\delta\theta}}{\delta t}\right)\times\mathbf{r}
$$

ou seja

$$
\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}
$$

onde

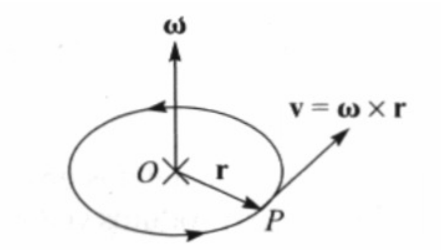
$$
\boldsymbol{\omega} = \lim_{\delta t\to 0}\left(\frac{\boldsymbol{\delta\theta}}{\delta t}\right) = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}
$$

se chama *vetor velocidade angular.*

- Módulo Corresponde à velocidade angular escalar definida anteriormente

$$
\omega = \frac{d\theta}{dt}
$$

- Direção A direção de $\boldsymbol{\omega}$ é a do eixo de rotação.
- Sentido É o sentido de $\boldsymbol{\delta\theta}$.



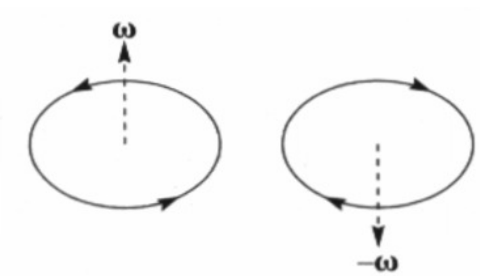
Vetor velocidade angular.

Decomposição da velocidade de uma partícula

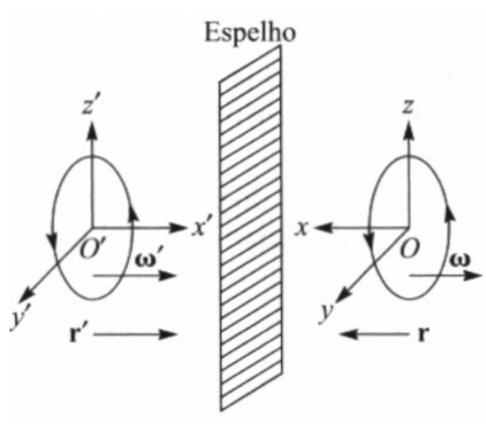
- Vimos que o movimento mais geral possível de um corpo rígido se compõe de uma translação e de uma rotação.
- Em correspondência a isso, a velocidade de uma partícula arbitrária do corpo, em um dado instante, pode ser decomposta em dois termos: (1) velocidade instantânea de translação $\mathbf{u}$; (2) velocidade instantânea de rotação, $\boldsymbol{\omega}$.
- Então, a velocidade total $\mathbf{V}$ pode ser escrita como

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Vetores polares e vetores axiais



Representação por um círculo orientado.



11.3 Torque

- Vamos voltar ao problema do movimento de um corpo rígido em torno de um eixo fixo (o mais simples).
- Já vimos que a descrição deste movimento se reduz à do movimento circular de um ponto P do corpo numa

seção transversal.

- Como há apenas um grau de liberdade (o ângulo de rotação θ em torno do eixo), podemos fazer uma analogia entre este movimento e o movimento unidimensional.

Correspondência entre grandezas lineares e angulares

- Podemos usar a analogia para estabelecer uma correspondências entre as grandezas lineares (do movimento unidimensional) e angulares (do movimento circular). Assim,

Grandezas lineares						Grandezas angulares
Deslocamento	←	x	↔	θ	→	Ângulo de rotação
Velocidade linear	←	$v = \dfrac{dx}{dt}$	↔	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	→	Velocidade angular
Aceleração linear	←	$a = \dfrac{dv}{dt}$	↔	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	→	Aceleração angular

Qual a grandeza que desempenha, no movimento de rotação, um papel análogo ao da força no movimento linear?

- Podemos definir força no movimento linear através do trabalho ΔW

$$\Delta W = F\Delta x$$

- O análogo de F para rotação seria uma grandeza τ tal que

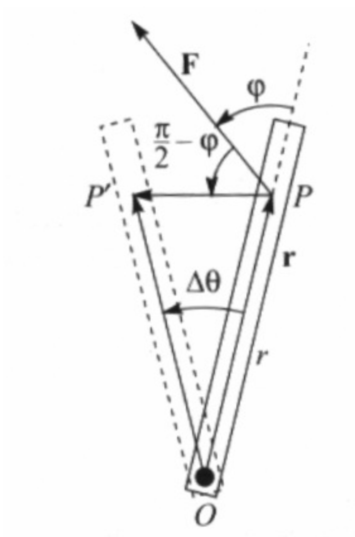
$$\Delta W = \tau\Delta\theta$$

  corresponda ao trabalho realizado numa rotação infinitesimal $\Delta\theta$.

Trabalho da força F sobre uma haste com extremidade fixa

- Projeção da força na direção do deslocamento $\mathbf{PP}'$

$$F\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = F\,\mathrm{sen}\,\varphi$$



- A magnitude do deslocamento do ponto de aplicação da força, $|\mathbf{PP}'|$, é dada por (lembre-se que estamos considerando uma rotação infinitesimal)

$$|\mathbf{PP}'| \approx r\Delta\theta$$

- Então, o trabalho realizado por F é

$$\Delta W = F\,|\mathbf{PP}'| = (F\operatorname{sen}\varphi)(r\Delta\theta) = Fr\operatorname{sen}\varphi\;\Delta\theta$$

- Comparando com $\Delta W = \tau\Delta\theta,$ conclui-se que

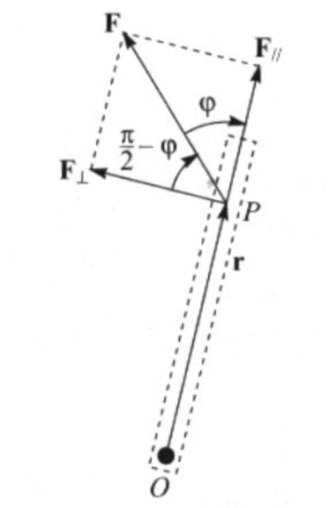
$$\tau = Fr\operatorname{sen}\varphi$$

  deve ser o análogo de F para a rotações em torno do ponto O.

Decomposição da força em duas componentes

- Podemos representar este resultado, usando a decomposição da força em duas componentes, paralela e perpendicular à direção de $\mathbf{r},$ ou seja,

$$F_{\parallel} = F\cos\varphi, \quad F_{\perp} = F\operatorname{sen}\varphi$$



- Assim, a grandeza τ pode ser reescrita como

$$\tau = F_{\perp}r$$

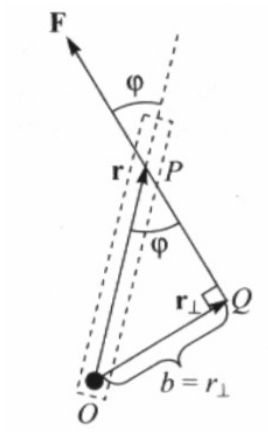
  mostrando que somente a componente perpendicular da força contribui para produzir a rotação da haste.
- Este resultado pode ainda ser reescrito como

$$\tau = F_{\perp}r = Fb$$

  onde a distância

$$b = r_{\perp} = r\operatorname{sen}\varphi$$

  é chamada de *braço de alavanca* da força.
- Quanto maior o braço de alavanca, mais eficaz é a força na produção de rotação.



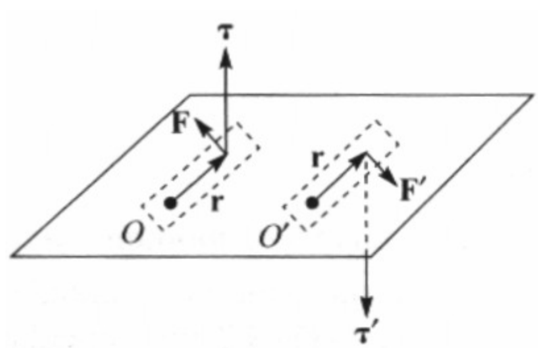
- Como a força é um vetor, o mesmo deve acontecer com a grandeza cuja analogia com a magnitude de $\mathbf{F}$ estamos analisando. Como φ é o ângulo entre as direções de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{r}$, então podemos escrever

$$\tau = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}|$$

ou seja, τ é também a magnitude de um vetor (o produto vetorial de $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- Este vetor chama-se *torque da força* **F** *em relação a* O.
- A direção e o sentido do torque tem significado físico importante na rotação.
- Direção No exemplo, a haste gira no plano definido por $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$ e $\boldsymbol{\tau}$ é perpendicular a este plano. Portanto, a direção de $\boldsymbol{\tau}$ coincide com a direção do eixo de rotação.
- Sentido Regra da mão direita.

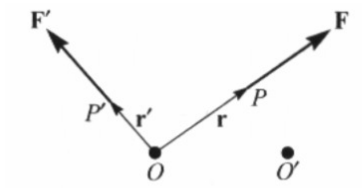


Força central

- A força central é definida como

$$\mathbf{F} = F(r)\,\hat{\mathbf{r}} = F(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r}$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor de posição relativo ao centro de forças O.



- Logo, se tomarmos o torque em relação a este ponto, teremos sempre:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{F(r)}{r}\, \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$$

- Ou seja, as forças centrais não tendem a produzir rotação em relação ao centro de forças O.
- Porém, se tomarmos o torque em relação a outro ponto, por exemplo O', ele será em geral diferente de zero.

Unidades de torque

- Torque se mede nas mesmas unidades de trabalho, ou seja,

força $\times$ deslocamento

- No SI,

$$1N \times 1m = 1N \times m$$

- Embora admitam as mesmas unidades, torque e trabalho são grandezas completamente diferentes. Em particular, *torque é uma grandeza vetorial, enquanto que trabalho é escalar.*

11.4 Momento Angular

- Além da força $\mathbf{F}$, outro conceito fundamental na dinâmica da partícula é o momento linear $\mathbf{p}$, relacionado com $\mathbf{F}$ pela 2^{a} lei de Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Na dinâmica de rotação de um partícula P em torno de um ponto O, o análogo de $\mathbf{F}$ deve ser o torque

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Mas,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Como

$$\mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = m\, \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$$

- Então

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

e, portanto,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

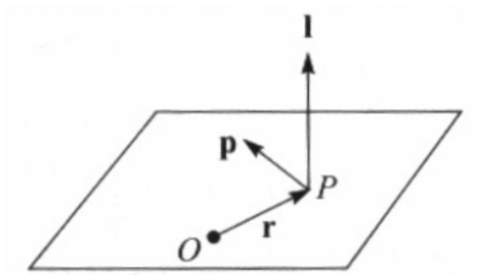
- Logo,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

onde

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

é o que se chama de *momento angular* da partícula em relação ao ponto O.

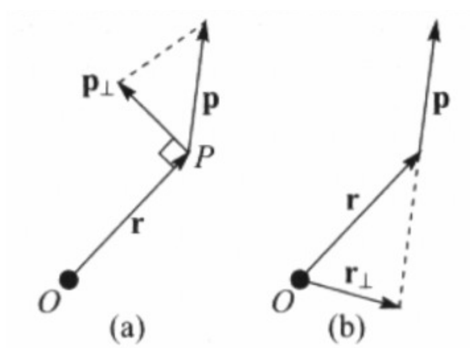


Vetor $\mathbf{l}$ O vetor $\mathbf{l}$ possui as seguintes características:

- Direção Perpendicular ao plano definido pelas direções de $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$.
- Sentido Regra da mão direita.
- Módulo Pode ser escrito como

$$l = r\mathbf{p}_\perp = \mathbf{r}_\perp p$$

onde $\mathbf{p}_\perp$ é a componente de $\mathbf{p}$ na direção perpendicular a $\mathbf{r}$, e $\mathbf{r}_\perp$ é a componente de $\mathbf{r}$ na direção perpendicular a $\mathbf{p}$.



Conservação do momento angular de uma partícula

- Da definição

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

verifica-se que, se

$$\boldsymbol{\tau} = 0$$

então

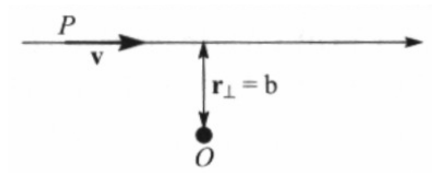
$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{l} = \text{constante.}$$

- Ou seja, se o torque sobre uma partícula em relação a um ponto se anula, então o momento angular da partícula em relação a esse ponto se conserva.

Partícula livre

- No caso da partícula livre, a força sobre ela é nula, $\mathbf{F} = 0$, o que implica que o torque sobre a partícula se anula em relação a qualquer ponto e, em especial, ao ponto O da figura. Sendo a velocidade $\mathbf{v}$ constante, então o momento angular da partícula livre em relação ao ponto O, que é dado por

$$l = mvb$$



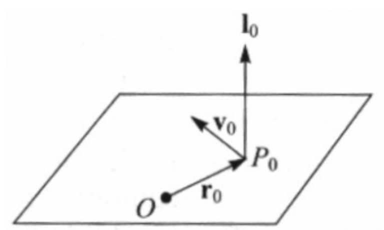
onde m e b são também constantes, implica que

$$\mathbf{l} = \text{constante}$$

o que confirma a lei de conservação do momento.

Forças centrais

- Vimos que o torque sobre uma partícula sujeita a forças centrais, em relação ao centro de forças, se anula identicamente. Logo, devido à lei de conservação, o momento angular desta partícula em relação ao centro de forças se conserva.
- Uma consequência imediata da conservação do momento angular para uma partícula sujeita a forças centrais é que seu movimento se dá num plano. Ou seja, a órbita de uma partícula sob ação de forças centrais permanece sempre no mesmo plano.



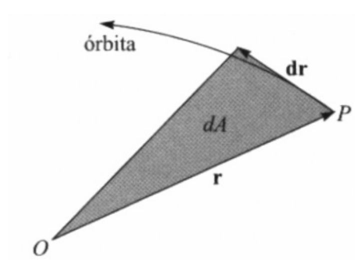
- Seja, por exemplo, $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$ a posição e a velocidade iniciais da partícula (figura acima). Como

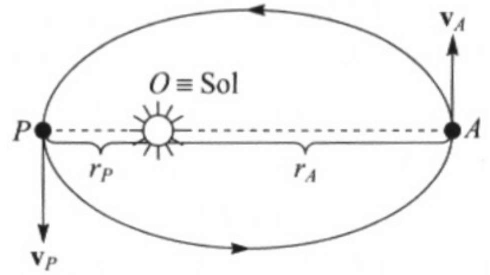
$$\mathbf{l}_0 = m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$$

é o momento inicial, perpendicular ao plano definido por $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$, e sabendo que o momento angular se conserva,

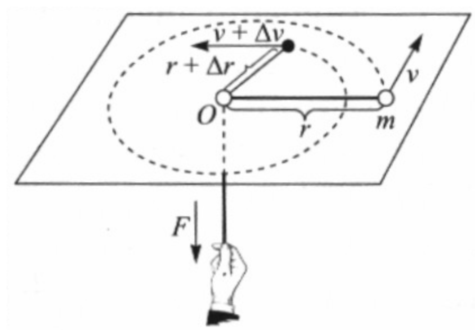
$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$$

então $\mathbf{l}$ tem sempre a mesma direação de $\mathbf{l}_0$, o que implica que os vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ têm que permanecer sempre no mesmo plano, que é o plano da órbita.

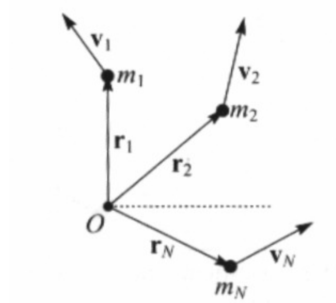




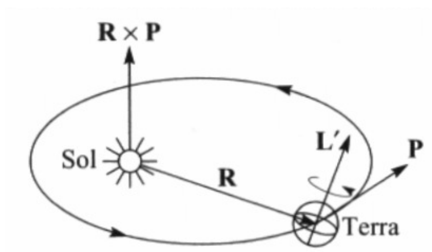
$\mathbf{v}_A$
$O \equiv$ Sol
P
A
r_P
r_A
$\mathbf{v}_P$



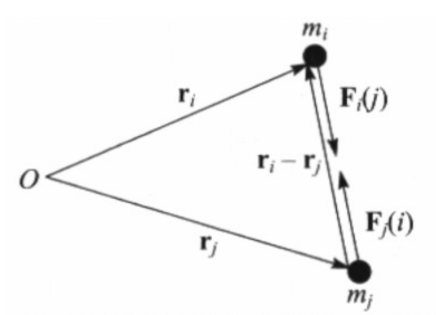
$v + \Delta v$
$r + \Delta r$
v
O
m
r
F



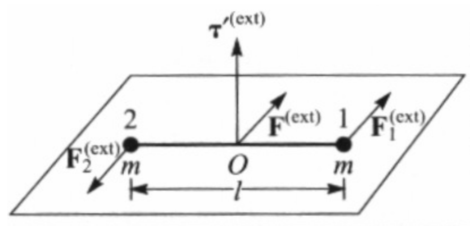
$\mathbf{v}_1$
m_1
$\mathbf{v}_2$
m_2
$\mathbf{r}_1$
$\mathbf{r}_2$
O
$\mathbf{r}_N$
$\mathbf{v}_N$
m_N

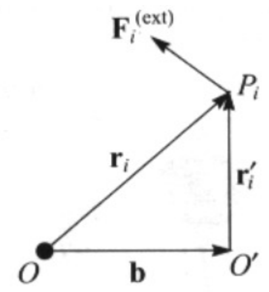


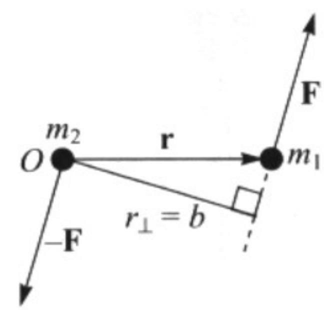
$\mathbf{R} \times \mathbf{P}$
$\mathbf{L}'$
$\mathbf{P}$
Sol
$\mathbf{R}$
Terra

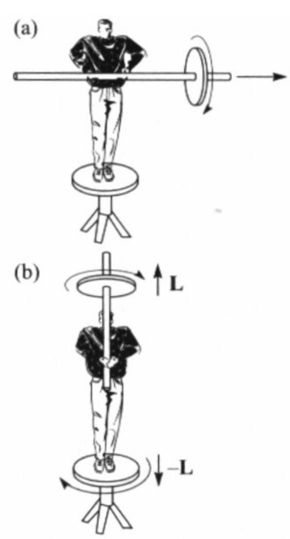


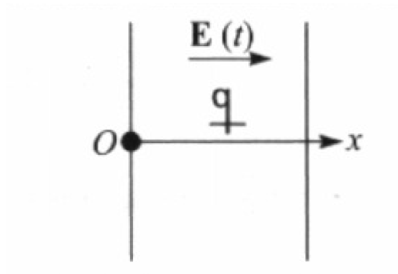
m_i
$\mathbf{r}_i$
$\mathbf{F}_i(j)$
O
$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$
$\mathbf{F}_j(i)$
$\mathbf{r}_j$
m_j

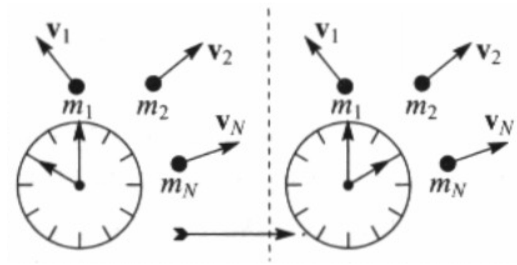

$\boldsymbol{\tau}'^{(\mathrm{ext})}$
2
$\mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}$
1
$\mathbf{F}_1^{(\mathrm{ext})}$
$\mathbf{F}_2^{(\mathrm{ext})}$
m
O
m
l

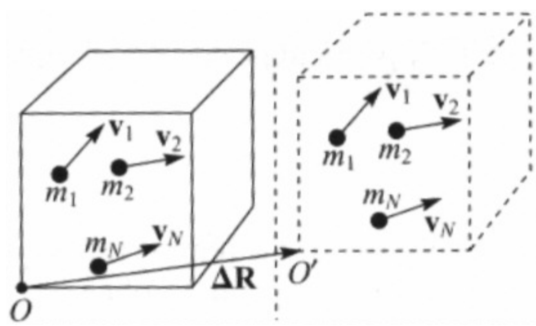

$\mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})}$
P_i
$\mathbf{r}_i$
$\mathbf{r}_i'$
O
$\mathbf{b}$
O'


$\mathbf{F}$
m_2
$\mathbf{r}$
O
m_1
$r_\perp = b$
$-\mathbf{F}$


(a)
(b)
$\mathbf{L}$
$-\mathbf{L}$


E (t)
q
O
x


v1
v2
m1
m2
vN
mN
v1
v2
m1
m2
vN
mN


v1
v2
m1
m2
mN
vN
ΔR
O
O′
v1
v2
m1
m2
mN
vN