Capítulo 4

OS PRINCÍPIOS DA DINÂMICA

Livro-Texto: *Curso de Física Básica-Mecânica*, H. Moysés Nussenzveig (4ª. Edição,2003)

Atenção Estas notas têm por finalidade auxiliá-lo no estudo dos assuntos tratados no livro-texto (Física Básica-Mecânica de H. Moysés Nussenzveig) e não devem ser usadas com o intuito de substituí-lo. A leitura do livro-texto é imprescindível!

■ Resumo do Capítulo

Aqui você tem uma visão geral do que será estudado neste capítulo.

▸ *Não se pode ensinar tudo a alguém; pode-se apenas ajudá-lo a descobri por si mesmo." (Galileu Galilei)*

Até aqui estudamos os movimentos sob o ponto de vista cinemático, cujo objetivo é descrevê-los, sem contudo se importar em como determiná-los numa dada situação física. Esta determinação, no entanto, constitui o problema fundamental da dinâmica que discutiremos neste capítulo.

De alguma maneira já sabemos que o movimento de um corpo é um resultado direto da interação deste corpo com outros corpos que estão ao seu redor (vizinhança). Por exemplo, quando estudamos o movimento de projéteis vimos que sua trajetória parabólica é devida a sua interação com a Terra. De modo análogo, o movimento orbital da Terra é o resultado de sua interação com o Sol, e assim por diante. Para descrever matematicamente essas interações, introduziu-se o conceito de *força,* e o estudo da dinâmica é basicamente a análise da relação entre força e as variações que elas produzem no movimento de um corpo.

Nosso estudo começa com a análise das forças em situações estáticas com o objetivo de formular um método (provisório) para medir seus efeitos. Na Seção 4.2, vamos discutir os resultadas das experiências de Galileu que deram origem a uma das leis fundamentais da mecânica (lei da inércia), que proporcionou um grande avanço no entendimento do movimento. Através desta lei, Galileu contrapôs-se às idéias dos pensadores gregos, em particular as de Aristóteles, que acreditava ser necessária a aplicação de uma força para colocar ou manter um corpo em movimento. Segundo a lei da inércia, que pode ser comprovada com boa aproximação em experiências práticas de laboratório, a força só é necessária para modificar o estado de movimento retilíneo uniforme (aceleração nula), ou de repouso, em que o corpo já se encontra. Logo, não haverá necessidade da aplicação de uma força para mantê-lo em repouso, ou em movimento retilíneo uniforme.

Então, pela lei da inércia sabe-se que a aplicação de uma força altera o estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme deste corpo. Isto quer dizer que um corpo sujeito a ação de forças apresenta aceleração não nula, mas esta lei não fornece a relação entre força e aceleração. Deve-se isto a Isaac Newton, que formulou as três leis do movimento, conhecidas como *Leis de Newton*, em que a 1ª Lei de Newton é a lei da inércia de Galileu com um novo enunciado. A 2ª Lei de Newton, que estudaremos na Seção 4.3, é o princípio fundamental da dinâmica: através dela é possível determinar o movimento de um corpo, quando conhecemos as forças que atuam sobre ele.

Finalmente, na Seção 4.5, estudaremos a 3ª Lei de Newton, também conhecida como Lei da Ação e Reação, que trata de aspectos gerais das forças. É através desta lei, que sabemos que duas partículas, interagindo em contato mútuo, as forças de ação e reação, que uma exerce sobre a outra, são iguais e de sentido contrários. *Mas, precisamos tomar cuidado, quando as interações não envolvem contato, pois em alguns destes casos a 3ª Lei de Newton pode não valer.*

■ Assunto: Os Princípios da Dinâmica

Aqui você fica sabendo quais os assuntos que serão tratatados nas aulas sobre este capítulo.

Seção 4.1 Forças em equilíbrio

Seção 4.2 A lei da inércia

Seção 4.3 A 2ª lei de Newton

Seção 4.4 Discussão da 2ª lei

Seção 4.5 Conservação do momento e 3ª lei de Newton

■ Objetivos Específicos

Ler apenas não basta: certifique-se sempre de que você está aprendendo. Resolva uma quantidade razoável de problemas do capítulo.

Ao término deste capítulo, verifique se você é capaz de:

- entender o conceito de força, como representação das interações entre um dado corpo e os outros ao seu redor.
- saber aplicar a condição de equilíbrio das forças que atuam sobre uma partícula usando o caráter vetorial para avaliar a força resultante.
- entender corretamente o que diz a lei da inércia, principalmente, no que se refere à sua validade que é restrita a referenciais inerciais.
- entender a relação entre força e aceleração, descrita pela 2ª Lei de Newton, tomando o cuidado para não interpretá-la como uma definição para força.
- entender como obter a força, que representa uma dada interação, através de um lei de força, e usá-la na 2ª Lei de Newton para obter a aceleração do movimento e, em conexão com a cinemática, determinar a velocidade e posição da partícula em função do tempo.
- entender o que diz a 3ª Lei de Newton no que se refere à atuação das forças de ação e reação em corpos diferentes.
- saber identificar o par ação-reação nas mais variadas situações.

■ Guia de Estudo

Nesta seção, discutimos alguns assuntos apresentados no livro-texto, visando uma abordagem, sempre que possível, complementar .

Seção 4.1 Forças em equilíbrio

O objetivo desta seção é introduzir o conceito de *força.* No livro-texto, você vai encontrar uma discussão baseada numa série de exemplos, todos relacionados com situações "estáticas" (onde o corpo permanece em equilíbrio), para formular um método (provisório) de medir o efeito de uma força, começando por nossa idéia intuitiva sobre esse agente, que está relacionada com o esforço muscular. Outra coisa que v. irá observar é que, por equanto, o estudo vai se limitar a forças aplicadas a uma *partícula*, isto é, a um objeto cujas dimensões são desprezíveis.

Para começar, discute-se o efeito de uma força aplicada a uma partícula P, conforme mostra a Figura 4.1. Pelas experiências diárias, sabemos que, ao puxar uma partícula que está ligada à extremidade de uma mola, estando a outra extremidade rigidamente fixa, produz-se na mola uma distensão, cuja medida pode ser usada para avaliar a força que foi aplicada à partícula.

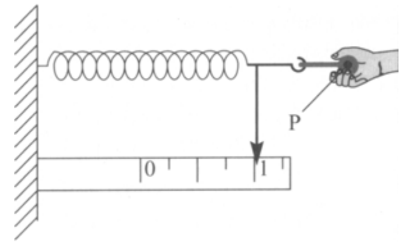


Figura 4.1 Distensão de uma

Mas, para que isto possa ser feito, é preciso, em primeiro lugar, que a distensão seja proporcional ao valor da força aplicada à mola. A experiência mostra que, enquanto a mola não sofrer uma derformação permanente, devido a forças suficientemente grandes, esta proprorcionalidade existe. Em vista disto, podemos associar à mola uma escala (ainda de forma bastante arbitrária) que consiste numa graduação “0”, “1” etc. Quando um ponteiro ligado à mola indicar a marcação “0” isto significa que nenhuma força está sendo aplicada sobre a mola. Através desta escala já é possível comparar a magnitude das forças. Por exemplo, quando duas pessoas diferentes aplicam esforços que levam o ponteiro à mesma posição de equilíbrio sobre a escala, podemos dizer que estas pessoas produzem “a mesma força” sobre a partícula.

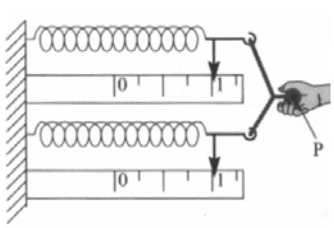


Figura 4.2 Força dupla.

Este procedimento, também permite decidir quando as forças aplicadas são diferentes e, em particular, quando estas são múltiplos de nossa unidade arbitrária. Por exemplo, a Figura 4.2 mostra como podemos definir uma força de duas unidades na escala adotada, utilizando duas molas idênticas: sob a ação desta força, cada mola sofre uma distensão correspondente a uma unidade de força.

Podemos também usar este procedimento para demonstrar que uma força produz efeitos diferentes conforme a direção e o sentido em que é aplicada, o que sugere uma repesentação do tipo vetorial.

Por exemplo, na Figura 4.3(b), $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ representam as forças aplicadas à partícula P mostrada na Figura 4.3(a), em módulo (medida pela distensão das molas) direção e sentido. É um *fato experimental* que a partícula P permanece em equilíbrio sob a ação simultânea de três forças, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$, quando

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0,$$

ou seja, quando a resultante das três forças se anula (polígono fechado na Figura 4.3 (b)). A experiência mostra portanto que as forças se combinam como vetores, e a condição de equilíbro (resultante nula) permanece válida para um número qualquer de forças aplicadas.

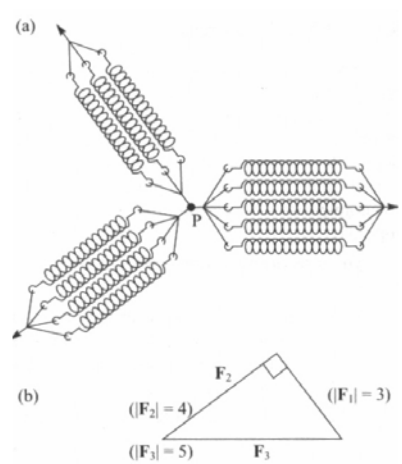


Figura 4.3 Equilíbrio de forças.

Agora que já sabemos que as forças são vetores, podemos analisar as condições que levam ao equilíbrio em várias situações. Em particular, como a partícula P está em equilíbrio na Figura 4.1, podemos dizer que a mola aplica sobre ela uma força igual e contrária à força aplicada pela pessoa.

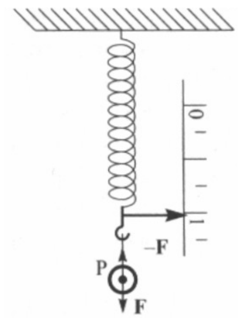


Figura 4.4 Força-peso.

Vamos agora analisar a situação indicada na Figura 4.4, em que a partícula está suspensa verticalmente da mola ("balança de mola"). A diferença com os outros exemplos, é que aqui nenhuma pessoa está puxando a partícula. Mas, de acordo com a figura, o ponteiro acusa uma distensão da mola, na situação de equilíbrio. Temos portanto duas forças iguais e contrárias, $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$, na figura, agindo sobre a partícula. Como no exemplo da Figura 4.1, a força $-\mathbf{F}$ é devida à mola. E a outra? Bem, já sabemos que não é uma força de contato (nada está em contato com a partícula, além da mola). Na verdade, esta força é devida à *atração gravitacional* da Terra e representa a *força-peso*.

Além da força de atração gravitacional, existem outras forças que atuam sobre uma partícula sem que haja um contato direto com o agente responsável pela força. São exemplos deste tipo, as *forças elétricas* e *magnéticas* que atuam sobre partículas eletricamente carregadas.

Agora considere que a partícula, que estava suspensa da mola, seja colocada sobre uma mesa, onde também permanece em equilíbrio (Figura 4.5). Novamente temos duas forças: $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$. Pelo que vimos no exemplo anterior, a força $\mathbf{F}$ é devido à atração gravitacional da Terra, mas e a força $-\mathbf{F}$? Antes, esta força estava sendo aplicada pela mola, que neste caso foi substituída pela mesa. Então, podemos infereir que a força $-\mathbf{F}$ é uma força aplicada pela mesa sobre a partícula, equilibrando a força-peso.

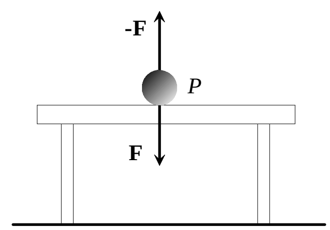


Figura 4.5-LT Reação de

Esta força $-\mathbf{F}$ é um exemplo de uma *reação de contato*, normal à superfície da mesa, e que tem origem na deformação elástica da mesa devido a seu contato com o objeto colocado sobre ela.

Mais adiante v. vai encontrar uma discussão mais detalhada sobre os diferentes tipos de forças que apareceram aqui.

Destaques da seção

(1) Se v. é um bom observador, deve ter visto que os exemplos mostrados nas figuras tinham todos o mesmo cenário: uma partícula interagindo com sua (dela) vizinhança. Por exemplo, a Figura 4.1 mostra uma partícula P sendo puxada para a direita por uma pessoa e para a esquerda, pela mola que se distendeu. Neste caso, a pessoa e a mola distendida representam a *vizinhança* que interage com a partícula. (Procure identificá-la nos outros exemplos). O conceito de *força* foi introduzido para descrever matematicamente a interação de um objeto com sua vizinhança. Assim, toda vez que houver uma *força* atuando sobre uma partícula, devemos logo pressupor a existência de algum agente externo (vizinhança) agindo sobre ela e identificar esta atuação. E vice-versa. Vimos também que os agentes externos podem estar em contato com a partícula (e.g. pessoa, mesa, mola) ou agindo à distância (e.g. força gravitacional, elétrica, magnética), razão pela qual as forças foram classificadas dessas formas.

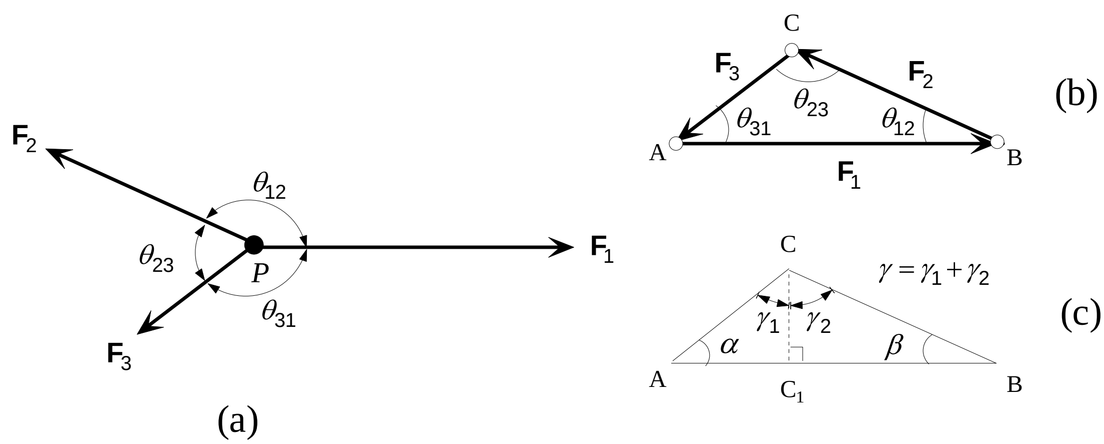
(2) Devemos também destacar o procedimento para avaliar essas interações, em situações de equilíbrio, que permitiu introduzir uma unidade de medida (provisória) da magnitude de uma força. Com a análise mais detalhada das situações de equilíbrio dessas interações, nas quais a partícula estava sempre em repouso, descobriu-se que as forças se combinam como vetores, e esse caráter vetorial das forças foi usado para expressar a condição de equilíbrio de uma partícula: **a resultante das forças que atuam sobre a partícula deve ser nula.**

Exemplo (Problem 1-LT) *Uma partícula está em equilíbrio sob a ação de três forças, F_1, F_2 e F_3. Mostre que*

$$\frac{|\mathbf{F}_1|}{\operatorname{sen}(\theta_{23})} = \frac{|\mathbf{F}_2|}{\operatorname{sen}(\theta_{31})} = \frac{|\mathbf{F}_3|}{\operatorname{sen}(\theta_{12})}$$

onde θ_{ij} é o ângulo entre F_i e F_j.

Solução *Vimos que um sistema de forças está em equilíbrio, quando sua resultante é nula. No Capítulo 2, aprendemos como determinar, geometricamente, a soma (ou resultante) de um número qualquer de vetores (figura (a)): dispondo cada vetore com origem na extremidade de seu predecessor (figura(b)), obtém-se a resultante ligando a origem do primeiro com a extremidade do último vetor. Para a resultante nula, este dois pontos coincidem (ponto A na figura (b)) e o resultado é que as três forças formam um polígono fechado (triângulo). Então, tudo o que temos de fazer é usar as relações trigonométricas num triângulo qualquer (essas relações são conhecidas como lei dos senos e lei dos cossenos). Se v. já souber a lei dos senos, então basta aplicá-la ao triângulo ABC da figura (c) e o problema acaba aí. Se v. não lembrar, siga a demonstração abaixo.*



▸ **A lei dos senos** *Para demonstrar o que o problema pede, considere o triângulo ABC mostrado na figura (c), cujos lados são proporcionais aos correpondentes vetores na figura (b). O ponto C_1 é a projeção ortogonal do C sobre o lado AB. Seja α, β e $\gamma(=\gamma_1+\gamma_2)$ os ângulos internos desse triângulo. Como $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, então*

$$\operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}(\gamma_1+\gamma_2) = \operatorname{sen}\gamma_1\cos\gamma_2 + \cos\gamma_1\operatorname{sen}\gamma_2.$$

A partir dos triângulos retângulos AC_1C (ângulos internos α, γ_1 e 90°) e C_1BC (ângulos internos β, γ_2 e 90°), podemos calcular o segundo membro dessa equação. Ou seja,

$$\operatorname{sen}\gamma_1 = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{CA}} \qquad \cos\gamma_1 = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{CA}}$$

$$\operatorname{sen}\gamma_2 = \frac{\overline{C_1B}}{\overline{BC}} \qquad \cos\gamma_2 = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{BC}}$$

e, portanto,

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{CA}}\frac{\overline{CC_1}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{CC_1}}{\overline{CA}}\frac{\overline{C_1B}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{CA}}\left(\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{C_1B}}{\overline{BC}}\right) = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{CA}}\left(\frac{\overline{AC_1}+\overline{C_1B}}{\overline{BC}}\right) = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{CA}}\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

onde usamos $\overline{AC_1}+\overline{C_1B}=\overline{AB}$ *(ver figura). Mas,* $\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{CA}}=\operatorname{sen}\alpha$ *então substituindo na equação acima, encontra-se* $\operatorname{sen}\gamma=\operatorname{sen}\alpha\,\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ *ou* $\overline{AB}\operatorname{sen}\alpha=\overline{BC}\operatorname{sen}\gamma$, *que ainda pode ser escrita na forma*

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\gamma}=\frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Por outro lado, como $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{AC}}$ *e* $\operatorname{sen}\beta=\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{BC}} \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{AC}}}{\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{BC}}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ *ou* $\overline{CA}\operatorname{sen}\alpha=\overline{BC}\operatorname{sen}\beta$, *que também pode ser escrita como*

$$\frac{\overline{CA}}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Em virtude da relação anterior entre α *e* γ, *podemos escrever as identidades,*

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\gamma}=\frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\overline{CA}}{\operatorname{sen}\beta}$$

conhecidas como lei dos senos. Em palavras: num triângulo qualquer, a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto correspondente é uma constante. Agora, transpondo para a notação original do problema [cf. figuras (b) e (c)], isto é, $\overline{AB}\to|\mathbf{F}_1|$, $\overline{BC}\to|\mathbf{F}_2|$ *e* $\overline{CA}\to|\mathbf{F}_3|$; $\alpha\to\theta_{31}$, $\beta\to\theta_{12}$ *e* $\gamma\to\theta_{23}$, *encontra-se*

$$\frac{|\mathbf{F}_1|}{\operatorname{sen}(\theta_{23})}=\frac{|\mathbf{F}_2|}{\operatorname{sen}(\theta_{31})}=\frac{|\mathbf{F}_3|}{\operatorname{sen}(\theta_{12})}$$

que é o resultado desejado.

Seção 4.2 A lei da inércia

Na seção anterior v. aprendeu que uma força sobre uma partícula aparece em consequência da interação desta partícula com outro corpo que está em sua volta (agente externo), cuja forma de sua atuação precisa ser identificada para conhecermos essa força. Vimos, nos exemplos ali discutidos, para várias situações em que a partícula permenaceu em repouso sob a ação de forças, que estas se combinaram de maneira que a resultante era nula (condição de equilíbrio). Então podemos sempre dizer que, quando uma partícula está em *repouso*, as forças que atuam sobre ela necessariamente estão em *equilíbrio*. Em outras palavras, *repouso implica necessáriamente equilíbrio das forças* que atuam sobre uma partícula.

E a afirmação inversa é também verdadeira?, ou seja, o *equilíbrio das forças implica necessariamente que a partícula esteja em repouso*? A resposta é **NÃO,** de acordo com a *lei da inércia*, que discutiremos nesta seção.

Movimento e repouso são conceitos relativos

Preliminarmente, podemos apelar para os conceitos relativos de movimento e repouso, para começarmos a admitir esta reposta. Por exemplo, sabemos que um objeto (partícula) em repouso dentro de um ônibus parado num terminal, também estará em repouso para um observador parado na plataforma (fora do ônibus). Isto significa que a condição de equilíbrio das forças que atuam sobre a partícula é satisfeita para ambos os observadores, ou seja, a resultante destas forças é *nula* nos dois referenciais. Considere outra situação em que o ônibus passa em movimento pela plataforma. Neste caso, uma partícula presa a ele continua em repouso em relação ao ônibus mas agora se movimenta em relação ao observador parado na plataforma. Então, em relação ao ônibus continua valendo a condição de equilíbrio da partícula. Mas, o que dizer da condição de equilíbrio em relação à plataforma? É possível para uma partícula em movimento satisfazer a condição de equilíbrio? Ou, o que é o mesmo, existirá alguma situação do movimento do ônibus para a qual a condição de equilíbrio continue valendo simultaneamente para os dois referenciais?

A resposta é **SIM**, mas deixaremos para mais tarde esta análise sob o ponto de vista dos referenciais. Por enquanto, vamos apresentar as idéias de Galileu sobre três questões importantes a respeito deste assunto, que ajudaram a desmistificar a relação existente entre força e movimento: **(1)** É necessário aplicar uma força, estando o corpo em repouso, para colocá-lo em movimento ou vice-versa? **(2)** É necessário aplicar uma força para manter um corpo em movimento? **(3)** É necessário aplicar uma força para manter um corpo em repouso? (Aqui o significado do termo *necessário* deve ser entendido como *indispensável*). Numa notação simbólica:

(1) *repouso* $\overset{\text{Força (?)}}{\Rightarrow}$ *movimento;* ou *movimento* $\overset{\text{Força (?)}}{\Rightarrow}$ *repouso*;

(2) *movimento* $\overset{\text{Força (?)}}{\Rightarrow}$ *movimento*;

(3) *repouso* $\overset{\text{Força (?)}}{\Rightarrow}$ *repouso.*

Como veremos mais adiante, as conclusões a que chegou Galileu, conhecidas como *lei da inércia,* responderam a estas questões:

(1) *repouso* $\overset{\text{Força (SIM)}}{\Rightarrow}$ *movimento;* ou *movimento* $\overset{\text{Força (SIM)}}{\Rightarrow}$ *repouso*;

(2) *movimento* $\overset{\text{Força (NÃO)}}{\Rightarrow}$ *movimento*;

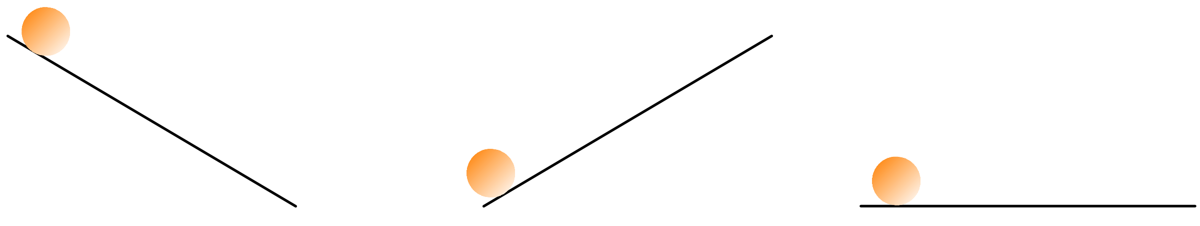
(3) *repouso* $\overset{\text{Força (NÃO)}}{\Rightarrow}$ *repouso.*

As experiências de Galileu

Até a época de Galileu, pensava-se, como ensinara os gregos, que uma força era sempre necessária tanto para colocar um objeto em movimento, como para mantê-lo em movimento. Isto funciona, mais ou menos, como acontece quando tentamos empurrar uma caixa sobre um piso: ao pararmos de empurrá-la, vemos que imediatamente a caixa tende a parar. Mas, então por que um projétil, como uma pedra, continua em movimento mesmo depois de ser lançado? A esta questão, Aristóteles respondia que o ar, ao ser empurrado para os lados pelo projétil, desloca-se para trás deste e produz a força que o impulsiona. Então, na concepção de Aristóteles, se a força que atua sobre um corpo é nula, o corpo estará sempre em repouso!

Galileu foi o primeiro a se insurgir contra essas idéias e a apresentar uma hipótese revolucionária, para sua época, ao formular pela primeira vez a *lei da inércia*. Tal hipótese foi obtida por extrapolação dos resultados de suas experiências com movimento de bolas rígidas e polidas sobre superfícies planas inclinadas também rígidas e polidas.

No livro-texto v. encontra a reprodução de um diálogo entre dois personagens, Salviati (que representa o próprio Galileu) e Simplício (adepto das idéias aristotélicas), em *Diálogos Sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo,* através do qual Galileu expõe suas idéias. Para entender no que consiste a conclusão deste diálogo, considere as figuras abaixo, em que se representa uma bola (perfeitamente esférica) rígida e bem polida, rolando sobre uma superfície em iguais condições.



(a) (b) (c)

Superfície com **(a)** declive e **(b)** aclive e **(c)** sem inclinação.

Segundo Galileu, havendo um declive (Figura (a)), a bola rola espontaneamente e permanece em movimento uniformemente acelerado, durante o tempo em que ela estiver em contato com a superfície inclinada; havendo um aclive (Figura (b)), após um impulso inicial, o movimento será uniformemente retardado, cuja duração depende do impulso e da inclinação do plano. Então, concluiu Galileu, não havendo aclive nem declive (Figura (c)), a bola deveria manter-se *indefinidamente* em repouso, ou, se impulsionada, manter-se *indefinidamente* em movimento retilíneo uniforme (aceleração nula).

▸ *Você deve ter percebido que a conclusão a que chegou Galileu é muito difícil (quiçá impossível) de ser comprovada na prática, exceto de forma aproximada, seja devido ao atrito, que leva um corpo a cessar rapidamente o movimento adquirido com um impulso inicial, ou a outras forças oriundas de diferentes tipos de interação (lembre-se que as partículas nunca estão só na natureza, há sempre "algo" por perto). Assim, para que Galileu chegasse corretamente à lei da inércia, foi preciso sem dúvida muita imaginação!*

Leis de Newton

Galileu proporcionou um grande avanço no entendimento do movimento, quando descobriu a lei da inércia: *um objeto por si só, sem a influência de outros corpos, permanece em movimento retilíneo com velocidade constante, ou continua em repouso, conforme esteja inicialmente em movimento, ou em repouso.* Mas ainda faltava saber como um objeto, afetado por outros corpos, muda sua velocidade. Esta contribuição foi devida à Isaac Newton, que, em seu tratado *Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural,* formulou três leis do movimento, conhecidas como *Leis de Newton*: A *Primeira Lei* é simplesmente uma redefinição da lei da inércia descoberta por Galileu. A *Segunda Lei* fornece uma forma específica de determinar como a velocidade de um objeto muda na presença de forças (interações). E a *Terceira Lei* descreve as forças de uma maneira mais geral. A seguir, vamos analisar cada uma dessas leis.

A 1ª Lei de Newton é a Lei da Inércia

"*Todo corpo persiste em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a modificar esse estado pela ação de forças impressas sobre ele".*

■ **Muito cuidado com a interpretação desta lei.** Qual das duas afirmações é a correta: (1) "*não há forças porque o objeto permance no estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme*", ou (2) "*o objeto permanece em estado de* *repouso ou de movimento uniforme porque não há forças*" ? Ou, usando a segunda parte da lei da inércia: (1) "*há forças porque o objeto muda seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme*", ou (2) "*o objeto altera seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme porque há forças*" ?

À primeira vista, poderíamos pensar que se trata simplesmente da mesma coisa dita de duas formas diferentes. Mas, isto não é verdade. Para entendermos melhor, vamos colocar as duas afirmações na forma que denota a relação de causa e efeito, como por exemplo, "$\mathbf{A}$ existe *porque* $\mathbf{B}$ existe" que numa forma simbólica vamos escrever como "$\mathbf{A} \Leftarrow \mathbf{B}$", que poderíamos ler assim (da direita para a esquerda): "*a existência de* $\mathbf{B}$ implica *na existência de* $\mathbf{A}$". Com este simbolismo, teremos:

(1) **força** $\Leftarrow$ **mudança no estado de movimento da partícula**

(2) **mudança no estado de movimento da partícula** $\Leftarrow$ **força**

estado de movimento $\equiv$ estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme

Desta forma, é fácil entender o significado de cada uma das afirmações: (1) *força é "algo" que* **tem origem** *nas mudanças do estado de movimento de um objeto;* e (2) *força é "algo" que* **dá origem** *a mudanças no estado de movimento.* De (1), poderíamos concluir **erroneamente** que a lei da inércia fornece uma definição de força, uma vez que não há o pressuposto de sua existência sem que haja mudanças no estado de movimento do objeto.

Mas, de acordo com o estudo na seção anterior (quando introduzimos o conceito de força), vimos que esta é o resultado da interação entre o objeto considerado e sua vizinhança e, portanto, sua origem está além das considerações sobre o estado de movimento do objeto. De fato, usar a lei da inércia para procurar a existência de um força aplicada, é tão improdutivo, quanto querer extrair algum significado de uma sentença, que contém, ao mesmo tempo, uma negativa opondo-se a uma afirmação (coisas do tipo: "persiste ... exceto quando não persiste" ou "tempo bom, salvo se chover" etc).

Por isso, a forma correta de usar a lei da inércia é procurar saber de antemão se existe ou não uma força aplicada sobre o objeto (investigando, para isto, a ação de agentes externos) e a partir daí esta lei nos diz se haverá ou não mudança no estado de movimento desse objeto. A variação no estado de movimento, portanto, não é a causa do aparecimento de uma força, mas simplesmente um efeito, sobre esse objeto, da força produzida por algum agente externo. É isto que nos diz **corretamente** a afirmação (2).

■ **A lei da inércia só vale no referencial inercial.** Já vimos que na prática é muito difícil de comprovarmos a lei da inércia devido às forças de interação entre o objeto considerado e sua vizinhança. Porém, distâncias típicas muito grandes que separam uma estrela de sua vizinha mais próxima ($\sim 10^{16}$ m $= 10.000.000.000.000$ km) tornam estes corpos celestes fortíssimos candidatos para os quais se verifica essa lei. De fato, a observação das estrelas confirma que estas obedecem com muito boa aproximação à lei da inérica. Aqui devemos tomar cuidado, pois "obeder à lei da inércia" nestas condições de (quase) ausência de forças, significa que as estrelas devem mover-se com movimento retilíneo e uniforme ou permanecer em repouso. Mas sabemos que *repouso* e *movimento* são conceitos relativos, que dependem de um referencial para serem descritos. Cabe, portanto, a pergunta: *Em relação a que refencial, a estrela está em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme*? Dita de outra forma: ***Em que referencial as estrelas obedecem à lei da inércia***? Ou ainda, de uma maneira mais geral: ***Em que referencial é válida a lei da inércia*** **?**

Se, no referencial onde se aplica a lei da inércia, a estrela deve permancer em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, então esta lei não vale em todos os referenciais. De fato, como um obervador na Terra, vê as estrelas girarem no céu, a Terra certamente não é referencial onde a lei da inércia seja válida.

Os referenciais onde se aplica a lei da inércia chamam-se ***referenciais inerciais***. Portanto, a Terra não é um refencial inercial: a razão é que ela possui movimentos de rotação. Mas, para a maioria dos propósitos, em escala de laboratório, a rotação da Terra afeta muito pouco os movimentos usuais, e, na prática, um referencial ligado à Terra pode ser considerado, com boa aproximação, um referencial inercial. Por outro lado, um referencial ligado às estrelas fixas é, com excelente aproximação, um referencial inercial.

Mas como saber se um referencial é ou não um referencial inercial? Já sabemos que a lei da inércia vale num referencial ligado a uma estrela. Ou seja, vista daquele referencial O uma partícula obedecerá a lei da inércia: *na ausência de forças, a partícula estará em repouso ou em movimento retilíneo uniforme* em relação àquele referencial. Agora suponha um referencial O' que se movimenta com velocidade $\mathbf{u}$ em relação ao referencial inercial O. Então se a partícula está em movimento retilíneo uniforme com velocidade $\mathbf{v}$ (constante) em relação ao referencial inercial O, decorre imediatamente da Eq. (3.9.2), que a velocidade da partícula $\mathbf{v}'$ em relação ao referencial O', é dada por

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

onde, para escrever esta equação, usamos a correspondência com (3.9.2): $\mathbf{v}_{12} \to \mathbf{v}'$, $\mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_1 \to \mathbf{u}$. Por hipótese $\mathbf{v}$ é uma velocidade constante, então para que $\mathbf{v}'$ também o seja (isto é, para que a lei da inércia também se aplique à partícula no referencial O') é necessária que a velocidade $\mathbf{u}$ com que o referencial O' se desloca em relação ao referencial inicial O seja *constante*.

▸ *A questão do ônibus*   *Como v. responderia àquela questão do ônibus colocada no início desta seção?*

Conclusão: *Qualquer referencial, em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial, é também um referencial inercial.* Logo, conhecendo um referencial inercial (estrela fixa), teremos em consequência uma infinidade de referenciais inerciais.

Seção 4.3   A 2ª Lei de Newton

Ao estudarmos a lei da inércia, vimos que sob a ação de forças um objeto *altera seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme* em relação a um referencial inercial. Isto significa que a ação das forças implica na variação (vetorial!) da velocidade do objeto em relação a esse referencial. Ou seja, pela lei da inércia, sabemos que uma força produz aceleração no movimento de um objeto, mas ainda não conhecemos com detalhes (a lei não fornece) qual a relação que deve existir entre força e aceleração. A busca desta relação é o assunto da seção.

■ **Objeto em queda livre.**   Vamos iniciar nossa busca, por este assunto que já conhecemos: queda livre. Já sabemos que um objeto em queda livre nas proximidades da superfície da Terra tem aceleração constante, ou seja, $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, onde $\mathbf{g}$ é vertical e dirigido para baixo. De acordo com a lei da inércia, quando há *aceleração* é porque existe uma *força* atuando no objeto. A questão agora é: *Qual é a força que atua no objeto*?

Já vimos na Seç. 4.1 que a Terra interage com todos os objetos que estão nas suas proximidades e o resultado desta interação (atração gravitacional) é representado pela ***força-peso***, que, como a aceleração $\mathbf{a}$ no movimento de queda livre, é também uma força vertical dirigida para baixo. Descobrimos isto, pendurando um objeto por uma mola e medindo a distensão desta que equilibra a força-peso, $\mathbf{F}$. Como a força-peso $\mathbf{F}$ e a aceleração $\mathbf{a}$ são vetores paralelos com o mesmo sentido, isto sugere que a aceleração devida a uma força seja proporcional à força, ou seja,

$$\mathbf{a} = k\mathbf{F}$$

onde k é o coeficiente de proporcionalidade. (Em termos vetorias, essa relação expressa o fato de que os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{F}$

são paralelos, onde k deve ser um escalar). Até aqui, só respondemos uma parte da questão, pois ainda não sabemos o significado deste coeficiente de proporcionalidade. As experiências da Seç. 4.1 agora podem ser úteis para completarmos a resposta.

Naquela seção aprendemos como medir uma força em termos da distensão de uma mola. Isto significa que sempre podemos conhecer a força *a priori*. Sendo assim, podemos usar a equação acima para saber o que acontece com a aceleração de dois corpos diferentes, quando neles aplicamos a mesma força. Aplicada a cada um dos corpos (1 e 2), essa relação nos fornece:

$$a_1 = k_1 F_1 \text{ e } a_2 = k_2 F_2$$

Agora, considerando que $F_1 = F_2$ (medida pela distensão de uma mola), encontra-se

$$a_1 = k_1 F \quad \text{e} \quad a_2 = k_2 F$$

o que significa, a menos que k_1 seja igua a k_2, que a mesma força produz acelerações diferentes em corpos diferentes. Desta maneira podemos dizer que o coeficiente k mede *uma propriedade do corpo*, que caracteriza sua *resposta* à força aplicada. Assim, se $k_1 > k_2$, a força aplicada ao corpo 1 produz uma aceleração a_1 maior do que a aceleração a_2 produzida pela mesma força aplicada ao corpo 2. Por outro lado, como a aceleração a_2 é menor do que a_1, as variações de velocidade sofridas pelo corpo 2 são menores do que as registradas pelo corpo 1, e, por isso, dizemos que o corpo 2 resiste mais às variações de velocidade do que o corpo 1. A propriedade que um corpo tem para resistir às variações de velocidade, para uma dada força, chama-se ***inércia***. Logo, o corpo 2 tem *inércia* maior do que o corpo 1, uma vez que aquele reiste mais às variações de velocidade do que este, para a mesma força aplicada a ambos. Como por hipótese, $k_2 < k_1$, de onde se obtém $(\text{inércia})_{\text{corpo } 2} > (\text{inércia})_{\text{corpo } 1}$, então o coeficiente k deve medir uma propriedade que é inversamente proporcional à ***inércia*** do corpo. Vamos denotar por m a propriedade que está relacionada com a “inércia” desse corpo. Assim, representando essa proporcionalidade inversa através de $k = 1/m$, podemos escrever a relação entre força e aceleração em termos do “coeficiente de inércia”, m, do corpo:

$$\mathbf{a} = k\mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \text{ para } k = \frac{1}{m}$$

▸ *Existem muitos exemplos na prática, de onde podemos observar que a mesma força produz, em geral, acelerações diferentes em corpos diferentes. Pense, por exemplo, em empurrar um caminhão e uma bicicleta até que ambos adquiram, ao final de um dado intervalo de tempo, a mesma variação de velocidade. Deixando as forças de atrito de lado, nossa experiência diária mostra que precisamos de uma força bem maior para acelerar um caminhão, do que para uma bicicleta. Se a mesma força for aplicada a ambos, a variação de velocidade adquirida pela bicicleta será muito maior do que a do caminhão. Logo, o caminhão tem uma “inércia” muito maior do que uma bicicleta.*

Experiências idealizadas

As experiências a seguir poderiam ser feitas em situações bastante favoráreis à redução das forças de atrito, usando-se discos deslizantes sobre uma camada de gás. As Figuras 4.6 (a), (b) e (c) mostram um série dessas experiência idealizadas.

- Em (a), a força $\mathbf{F}$, medida pela distensão da mola é aplicada ao disco D, que desliza com movimento retilíneo uniformemente acelerado de aceleração $\mathbf{a}$ na direção de $\mathbf{F}$. Na parte inferior desta figura, mostra-se como a velocidade varia com o tempo em decorrência da aplicação desta força. Note que a inclinação da reta que representa o gráfico $v \times t$, está relacionada com a aceleração do disco.
- Em (b), mantém-se o mesmo disco, mas a força é duplicada (observe que agora são duas molas que a força terá

de distender). Para esta força $2\mathbf{F},$ verifica-se que a aceleração do disco D é $2\mathbf{a}$. Isto é indicado na parte inferior da figura, mostrando, para uma força $2\mathbf{F},$ uma inclinação do gráfico $v \times t$ maior do que no caso anterior para a força $\mathbf{F}$. O resultado das experiências mostradas nas figuras (a) e (b) para o mesmo disco D indica que existe de fato uma proporcionalidade entre a aceleração e a força que só depende das características do corpo D. De fato, medindo-se a aceleração através do gráfico $v \times t$ para esses casos verifica-se que $a_{(b)} = 2a_{(a)}$. Então pela relação $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$ encontra-se (em módulo) $\frac{F_{(b)}}{m_{(b)}} = 2\frac{F_{(a)}}{m_{(a)}}$. Mas, como as forças aplicadas satisfazem a relação $F_{(b)} = 2F_{(a)}$ então

$$\frac{2F_{(a)}}{m_{(b)}} = 2\frac{F_{(a)}}{m_{(a)}} \Rightarrow \frac{1}{m_{(b)}} = \frac{1}{m_{(a)}}$$

Ou seja, a constante de proporcionalidade $\frac{1}{m}$ são iguais nos dois casos em que o disco é o mesmo.

- Na Figura (c), a força voltou a ser a mesma, mas empílhamos os dois discos idênticos D e D'. Na parte inferior da figura, registramos a velocidade do corpo em função do tempo para uma força $\mathbf{F}$ aplicada ao conjunto. Vemos que a inclinação do gráfico $v \times t$ agora é menor do que no caso (a), onde a força é a mesma. Explorando mais esse gráfico, descobre-se que a aceleração neste caso tem um módulo $a_{(c)} = \frac{1}{2}a_{(a)}$. Seja k o coeficiente de proporcionalidade do disco D, e seu coeficiente de inércia m. Sejam k' e m' os respectivos coeficientes para o disco D'. Como já determinamos as acelerações $a_{(a)}$ e $a_{(c)}$ $\left(a_{(c)} = \frac{1}{2}a_{(a)}\right)$, a partir dos gráficos $v \times t$ das Figuras (a) e (c), podemos usar este resultado juntamente com a relação $\mathbf{a} = k\mathbf{F}$ ou $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, para encontrar a relação entre os coeficientes de proporcionalidades (ou de inércia) nos dois casos. Assim (em módulo) teremos

$$a_{(c)} = \frac{1}{2}a_{(a)} \Rightarrow \frac{F_{(c)}}{m_{(c)}} = \frac{1}{2}\frac{F_{(a)}}{m_{(a)}}$$

Como as forças são iguais nos dois casos (a) e (c) que estamos tratando ($F_{(a)} = F_{(c)} = F$) então

$$\frac{F}{m_{(c)}} = \frac{1}{2}\frac{F}{m_{(a)}} \Rightarrow \frac{1}{m_{(c)}} = \frac{1}{2m_{(a)}} \Rightarrow m_{(c)} = 2m_{(a)}$$

ou seja, o coeficiente de inércia, $m_{(c)}$, no caso (c), duplicou em relação ao coeficiente de inércia, $m_{(a)}$, no caso (a). Isto significa que a "inércia" de dois objetos idêntidos formando um objeto único (caso (c)) é o dobro do coeficiente de um deles (caso (a)). Neste sentido, o coeficiente de inércia m mede, portanto, a "quantidade de matéria" do objeto.

Repetindo as experiências como (a) e (c) com objetos diferentes, sujeitos à mesma força $\mathbf{F}$, obteríamos de forma mais geral

$$\mathbf{F} = m_1\mathbf{a}_1 = m_2\mathbf{a}_2 = m_3\mathbf{a}_3 = \cdots$$

ou seja,

$$\frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_3|} = \frac{m_3}{m_1}, \ldots$$

As acelerações adquiridas por objetos diferentes submetidos à mesma força são inversamente proporcionais aos respectivos "coeficientes de inércia".

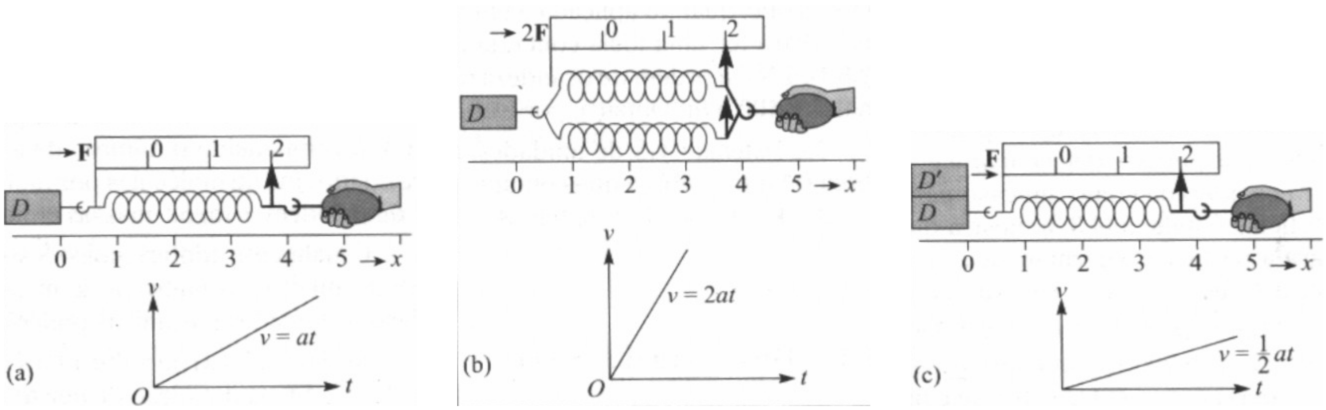


Figura 4.6-LT Coeficiente de inércia.

A 2ª Lei de Newton. Experiências deste tipo que acabamos de analisar, nos permitem inferir assim a 2ª Lei de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

onde o "coeficiente de inércia" associado à partícula sobre a qual age a força $\mathbf{F}$ chama-se ***massa inercial*** dessa partícula.

Unidades de força

Agora, com a ajuda da Eq. (4.3.3-LT), podemos substituir a definição provisória de unidade de força da Seç. 4.1.

Sistema Internaciona (SI). Neste sistema, onde as unidades básica são **m**, **kg** e **s**, a unidade de força é o **Newton** (N). Por definição **1N** é a força que, quando aplicada a um corpo de massa de 1kg, comunica-lhe uma aceleração de 1m/s^2.

Sistema CGS. Neste sistema, onde as unidades básicas são **cm**, **g** e **s**, a unidade de força é o **dina** (dina). Por definição **1 dina** é a força que, quando aplicada a um corpo de massa de 1g, comunica-lhe uma aceleração de 1cm/s^2.

Seção 4.4 Discussão da 2ª Lei de Newton

No LT, você vai encontrar uma discussão sobre vários aspectos da 2ª Lei de Newton. Aqui destacamos alguns pontos importantes, mas é necessário que v. leia também o livro-texto para ter uma visão mais geral do assunto.

- **A Lei da Inércia é uma consequência da 2ª Lei.** Se a força resultante $\mathbf{F}$ que atua sobre uma partícula é nula, a segunda lei mostra que $\mathbf{a} = 0$ e, conforme (3.5.9), a partícula permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Como no caso da 1ª, a 2ª Lei só é válida num referencial inercial.
- **A 2ª Lei não é uma definição de força.** Já vimos que a força é o resultado da interação entre uma partícula e sua vizinhança, e a forma dessa força é específica para cada tipo de interação, que define $\mathbf{F}$ em termos da situação em que a partícula se encontra. Assim, para cada tipo de interação, existe uma definição da força, ou como se chama usualmente uma *lei de força*. São exemplos: lei da gravitação universal, leis das forças elétricas e magnéticas etc.
- **A 2ª Lei e a massa inercial.** O conceito de massa inercial aparece como consequência da 2ª Lei, que também a considera uma característica da partícula. Isto significa que, sendo a massa determinada quando a ação de

uma força conhecida atua sobre uma partícula, o mesmo valor de m deve ser usado para descrever o movimento da partícula sob a ação de quaisquer outras forças, exceto quando a partícula perde sua identidade. Por exemplo, uma gota de chuva que cai aumenta sua massa (e seu volume) porque outras partículas vão se agregando a ela durante o percurso, e, portanto, deixa de ser aquela partícula que iniciou o movimento de queda; ou então, um foguete que ejeta combustível, diminui sua massa à medida que sobe em razão da quantidade de massa expelida. Estes são exemplos de sistemas de *massas variáveis*, que serão tratados mais tarde.

- **A 2ª Lei e as grandezas dinâmicas.** As grandezas físicas que intervêm na dinâmica são *deslocamentos*, *velocidades* e *acelerações*. Por isso, não precisamos considerar derivadas temporais da aceleração, tais como $d\mathbf{a}/dt,\ d^2\mathbf{a}/dt^2$ etc.
- **A 2ª Lei e o princípio da superposição das forças.** Como $\mathbf{a}$ é um vetor e m um escalar, segue-se da 2ª Lei que $\mathbf{F}$ é um vetor. Assim, se $\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2,\ldots,\mathbf{F}_n$ são forças de diferentes origens (gravitacional, elétrica, magnética etc) que atuam sobre a mesma partícula, a força $\mathbf{F}$ que aparece em $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ é a força *resultante* que atua sobre a partícula, ou seja, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n$ (soma vetorial). Este resultado experimental é conhecido como *princípio da superposição de forças*.

Considere por exemplo uma partícula 1 interagindo com duas outras (Figura 4.7). Seja $\mathbf{F}_{1(2)}$ a força sobre a partícula 1 devida à partícula 2, e $\mathbf{F}_{1(3)}$, devida à partícula 3. A força resultante sobre a partícula 1 será então $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{1(2)} + \mathbf{F}_{2(3)}$. Pelo princípio da superposição, a força $\mathbf{F}_{1(2)}$ seria a força que agiria sobre 1 na presença apenas da partícula 2 (como se a partícula 3 não existisse); de modo similar, para $\mathbf{F}_{1(3)}$. Acontece que a força $\mathbf{F}_{1(2)}$ pode ser modificada pela presença da partícula 3 (interação entre 2 e 3) e $\mathbf{F}_{1(3)}$, pela presença de 2. Desta forma, o princípio da superposição continua valendo, mas as forças $\mathbf{F}_{1(2)}$ e $\mathbf{F}_{1(3)}$ devem ser calculadas levando em conta a presença de todas as partículas.

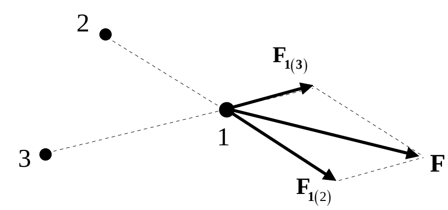


Figura 4.7 Partícula em interação com duas outras.

Quantidade de movimento ou momento linear

Na formulação original da segunda lei, Newton usou o conceito de quantidade de movimento (ou momento linear), que assim definiu: "*A quantidade de movimento é a medida do mesmo, que se origina conjuntamente da velocidade e da massa*". Ou seja, momento linear de uma partícula é o produto de sua massa por sua velocidade:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

de onde decorre imediatamente que $\mathbf{p}$ é um vetor. Portanto, se excluirmos os sistemas de massas variáveis, m não varia com o tempo, e a derivada temporal do momento torna-se

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

Comparando esta equação com a Eq. (4.3.3-LT) encontra-se

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

que corresponde à formulação de Newton da 2ª Lei: "*A variação do momento é proporcional à força impressa, e tem a* *direção da força*." Em outras palavras, a força aplicada a uma partícula, produz continuamente uma variação do seu momento linear (através da variação de sua velocidade). Na linguagem matemática para esta formulação da 2^a Lei, força é igual a t*axa de variação temporal d*o momento linear da partícula em que atua.

- *Embora esta formulação pareça inteiramente equivalente à (4.3.3-LT) , ela tem vantagens sobre aquela, como veremos mais adiante.*

Exemplos ilustrativos da 2ª Lei de Newton

- **Exemplo 1** – **Força-peso.** *Quando estudamos o exemplo mostrado na Figura 4.4-LT, vimos que é possível medir a força-peso* $\mathbf{P}$ *em equilíbrio pela balança de mola. Fazendo uma série de medidas deste tipo com objetos de massas diferentes, encontraríamos que, em todos os casos, vale a relação* $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, *onde* m *é a massa inercial do corpo e* $\mathbf{g}$ *é a aceleração da gravidade (constante), vertical, dirigida para baixo e de módulo* g. *De fato, esta é a lei de força para a força-peso de um corpo nas proximidades da superfície da Terra, sendo um caso particular da lei da gravitação universal (que será estudada mais adiante). Vamos considerar agora um corpo em queda livre nas proximidades da superfície da Terra: a única força que atua sobre ele é o peso* $\mathbf{P}$. *Substituindo* $\mathbf{F} = \mathbf{P} = m\mathbf{g}$ *na* 2^a *Lei, encontra-se:*

$$\mathbf{F} = ma \Rightarrow m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{g}.$$

  Isto mostra que, para um corpo em queda livre, a 2^a *Lei leva à Eq. (3.6.1-LT).*

■ **Mais uma unidade de força: o quilograma-força.** Para aplicações em engenharia, é comum introduzir outra unidade de força, o *quilograma-força* (kgf), definido *como a força-peso sobre uma massa de* 1 *kg.* Considerando $g = 9,8$ m/s^2, o quilograma-força equivale, em Newtons,

$$1\text{kgf} = 9,8\text{N}.$$

- **Exemplo 2** – **Plano inclinado.** *Considere uma partícula de massa* m *colocada sobre um plano inclinado de um ângulo* θ *(Figura 4.8). Além da força-peso,* $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, *atua na partícula a reação de contato* $\mathbf{N}$ *(na direção normal ao plano) devida a seu contato com o plano. Além dessa reação de contato normal à superfície, pode haver também uma reação de contato tangencial associada com as forças de atrito, que serão discutidas mais adiante. Em geral, a reação de contato pode ter componentes tanto na direção normal ao plano, como na direção tangencial. Neste exemplo, vamos considerar uma superfície perfeitamente polida, sem atrito, o que elimina a componente tangencial, restando apenas a componente normal ao plano* $\mathbf{N}$. *Na Figura 4.9, mostra que a módulo da força resultante* $\mathbf{F}$ *é*

$$F = Psen\theta = mgsen\theta$$

  onde usamos a lei dos senos $\left(\frac{P}{sen90^o} = \frac{F}{sen\theta}\right)$ *para determiná-lo. Vemos também na figura que* $\mathbf{F}$ *é tangencial ao plano e dirigida para baixo.*

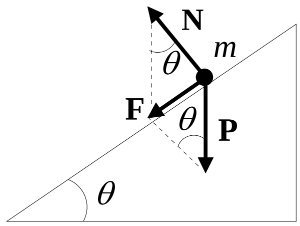


Figura 4.8 Plano inclinado

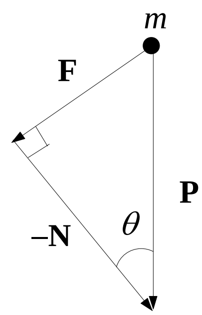


Figura 4.9 Cálculo da resultante

A 2^a Lei, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, garante que a aceleração $\mathbf{a}$ do movimento da partícula ao longo do plano tem a direção da força resultante $\mathbf{F}$. Como já conhecemos a força resultante, basta substituí-la nessa equação para encontrar o módulo da aceleração:

$$mgsen\theta = ma \Rightarrow a = mgsen\theta$$

Logo, o efeito de um plano inclinado é reduzir a aceleração da queda livre por um fator igual ao seno do ângulo de inclinação.

▸ **Exemplo 3 – Funda.** *Vamos considerar o exemplo de uma partícula em movimento circular uniforme. Vimos que este movimento é acelerado, de modo que só pode ser mantido pela ação de uma força. Já vimos que a aceleração neste movimento tem direção radial e é dirigida para o centro do círculo, dada pela Eq. (3.7.13).*

Para produzir esta aceleração no movimento de uma partícula de massa m, é necessária a aplicação de uma força $\mathbf{F}$, que pode ser ou não de contato, na direção radial dirigida para o centro do círculo, razão pela qual é conhecida como força centrípeta. A Figura 4.10 mostra um exemplo familiar da atuação de uma força centrípeta: uma pedra amarrada num fio é feita girar em torno de nossa mão em movimento circular uniforme. A força centrípetra $\mathbf{F}$ nesse caso é aplicada pela nossa mão e transmitida à pedra através do fio. Esta força força produz a aceleração centrípeta $\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$ e, de acordo com a 2^a Lei, estão relacionadas por:

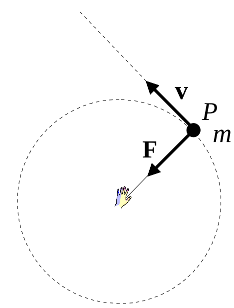


Figura 4.10 Funda

$$\mathbf{F} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}}.$$

Se soltarmos o fio, quando a pedra estiver num determinado ponto P de sua órbita (mostrado na figura) e desprezarmos o efeito da força-peso (gravidade), $\mathbf{F}$ se torna subitamente igual a zero, e a lei da inércia implica então que a pedra se move, a partir do ponto P, em movimento retilíneo uniforme com velocidade $\mathbf{v}$ igual à velocidade do movimento circular no ponto P da órbita, ou seja, tangente ao círculo em P (linha tracejada). A pedra "sai pela tangente".

Seção 4.5 Conservação do momento e a 3^a Lei de Newton

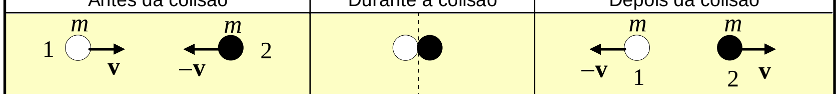
Até aqui consideramos as forças exercidas sobre uma única partícula. Embora já se saiba que essas forças são devidas a ação de outras partículas, ainda não consideramos o que acontece com estas partículas. Para isto, o LT considera três experiências idealizadas, que podem ser reproduzidas em laboratório, com boa aproximação, com dois discos deslizantes sobre uma camada de gás. Os resultados dessas experiências são mostradas nas Figuras 4.11, 4.12 e 4.13. Leia esta seção no livro-texto com bastante atenção. Aqui destamos apenas os pontos mais importantes.

▸ **Condições das experiências.** Para discutir a interação de partículas, o LT considera a situação mais simples possível, em que há apenas duas partículas interagentes, designidas por 1 e 2; as únicas forças existentes são aquelas devidas à ação mútua de uma sobre a outra, $\mathbf{F}_{1(2)}$ (força sobre 1 devida a 2) e $\mathbf{F}_{2(1)}$ (força sobre 2 devida a 1).

▸ **Descrição das experiências.** A interação entre as duas partículas é analisada em experiências de colisão entre dois discos, sendo as forças de interação entre eles as forças de contato, que atuam somente durante o tempo de colisão, que é o intervalo de tempo Δt em que os dois discos permanecem em contato. Este intervalo é extremamente curto, podendo-se dizer que a colisão é "instantânea". Antes e depois da colisão a força resultante sobre cada disco é nula, de modo que as velocidades dos discos antes e depois da colisão são constantes: $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são as velocidades dos discos 1 e 2 antes da colisão e $\mathbf{v}_1'$ e $\mathbf{v}_2'$, as velocidades correspondentes depois da colisão, respectivamente. Os momentos lineares correspondentes são designados por $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ (antes da colisão) e $\mathbf{p}_1'$ e $\mathbf{p}_2'$ (depois da colisão). Em todas a experiências as colisões são *frontais*, ou seja, se dão segundo a linha que une os centros dos dois discos.

■ **Resultados da experiência 1 (Figura 4.11).** Nesta experiência, os discos se aproximam com velocidades iguais e contrárias e, depois da colisão, afastam-se tendo permutado as velocidades.

Experiência 1		
Antes da colisão	Durante a colisão	Depois da colisão

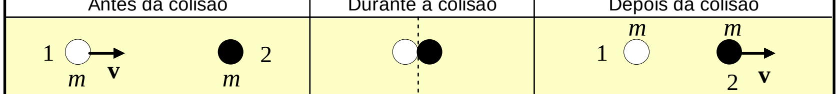


$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ $\quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}$	← Velocidades →	$\mathbf{v}_1' = -\mathbf{v}$ $\quad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}$
$\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}$ $\quad \mathbf{p}_2 = -m\mathbf{v}$	← Momentos →	$\mathbf{p}_1' = -m\mathbf{v}$ $\quad \mathbf{p}_2' = m\mathbf{v}$
$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$	← Total →	$\mathbf{P}' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$

Figura 4.11 Colisão entre dois discos com velocidades opostas.

■ **Resultados da experiência 2 (Figura 4.12).** Na experiência 2, o disco 2 está inicialmente e repouso e o disco 1 se aproxima dele com velocidade $\mathbf{v}$; após a colisão, o disco 1 parou e o disco 2 se afasta de 1 com velocidade $\mathbf{v}$.

Experiência 2		
Antes da colisão	Durante a colisão	Depois da colisão



$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ $\quad \mathbf{v}_2 = 0$	← Velocidades →	$\mathbf{v}_1' = 0$ $\quad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}$
$\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}$ $\quad \mathbf{p}_2 = 0$	← Momentos →	$\mathbf{p}_1' = 0$ $\quad \mathbf{p}_2' = m\mathbf{v}$
$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m\mathbf{v}$	← Total →	$\mathbf{P}' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = m\mathbf{v}$

Figura 4.12 Colisão com um disco em repouso.

■ **Resultados da experiência 3 (Figura 4.13).** Na experiência 3, a situação inicial é a mesma da experiência 2, mas grudamos no disco 1 um pedacinho de chiclete (de massa desprezível), de tal forma que, ao colidirem, os dois discos permanecem colados, passando a se mover juntos (massa $2m$). Após a colisão, verifica-se que os dois discos juntos movem-se com velocidade $\frac{1}{2}\mathbf{v}$.

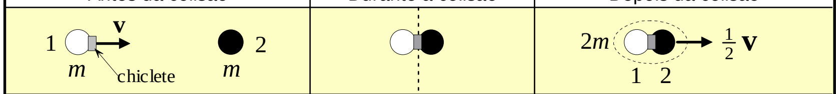
Experiência 3		
Antes da colisão	Durante a colisão	Depois da colisão
		
$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} \quad \mathbf{v}_2 = 0$	$\leftarrow$ Velocidades $\rightarrow$	$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2' = \frac{1}{2}\mathbf{v}$
$\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v} \quad \mathbf{p}_2 = 0$	$\leftarrow$ Momentos $\rightarrow$	$\mathbf{p}_1' = \mathbf{p}_2' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}$
$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m\mathbf{v}$	$\leftarrow$ Total $\rightarrow$	$\mathbf{P}' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = m\mathbf{v}$

Figura 4.13 Colisão com agregação.

■ **Discussão dos resultados.** Em cada uma das figuras foram assinaladas as velocidades e os momentos dos discos antes e depois da colisão. Na última linha, marcada "total", calcula-se o *momento linear total do sistema*, que no caso de duas partículas, é definido como a soma dos momentos das partículas 1 e 2, antes ($\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$) e depois da colisão ($\mathbf{P}' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$). Na tabela abaixo, apresentamos o resumo dos resultados obtidos em todas as experiências:

Momento total ▸	Antes	Depois
Experiência 1	$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$	$\mathbf{P}' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0$
Experiência 2	$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m\mathbf{v}$	$\mathbf{P}' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = m\mathbf{v}$
Experiência 3	$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m\mathbf{v}$	$\mathbf{P}' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = m\mathbf{v}$

Como se pode observar desta tabela, em todos as experiências o momento total do sistema de duas partículas é o mesmo antes e depois da colisão, ou seja,

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mathbf{P}'$$

■ **Extrapolações.** Se fizéssemos experiências de colisão com discos de massas diferentes, $m_1 \neq m_2$, e quaisquer velocidades $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ antes da colisão, verificaríamos sempre, como nas três experiências descritas acima, a validade da última equação (Eq. (4.5.1-LT)), contanto que as únicas força que atuem sobre o sistema sejam as interações entre as duas partículas durante a colisão, ou seja, desde que possamos desprezar os efeitos de forças externas ao sistema (como o atrito). Nessas condições, dizemos que o sistema é *isolado.*

■ **Princípio de Conservação do Momento Total.** Experiências como as que acabamos de descrever (e muitas outras) levaram ao Princípio de Conservação do Momento Total: *O momento total de um sistema isolado se conserva.* Este é um dos princípios fundamentais da física e é uma das razões do conceito de momento introduzido na Eq. (4.4.2). Como veremos, este princípio vale para um sistema com qualquer número de partícula e em situações mais gerais do que a que estamos considerando.

■ **Consequências do Princípio de Conservação do Momento Total.** A Eq. (4.5.1) pode ser reescrita como

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \;\Rightarrow\; \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1 = -(\mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_2) \;\Rightarrow\; \Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2$$

onde $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{(depois)}} - \mathbf{p}_{\text{(antes)}}$ é a variação do momento em consequência da colisão; $\Delta\mathbf{p}_1$ e $\Delta\mathbf{p}_2$ referem-se às variações do momento das partículas 1 e 2, respectivamente. Estas variações se produzem durante o intervalo de tempo Δt (extremamente curto) que dura o processo de colisão. Então,

$$\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2 \Rightarrow \frac{\Delta\mathbf{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\mathbf{p}_2}{\Delta t}$$

Como Δt é muito pequeno, podemos inferir que

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$$

durante o processo de colisão. Mas esta equação também pode ser escrita na forma

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

Como o momento total antes da colisão é definido como $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, a equação acima representa

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$$

que só é satisfeita se o momento total $\mathbf{P}$, antes da colisão, não depender do tempo, isto é, se $\mathbf{P}$ for uma constante. Pelo princípio da conservação do momento, $\mathbf{P}' = \mathbf{P}$, e, portanto, o momento depois da colisão, $\mathbf{P}'$, deve também ser uma constante. Logo, este resultado significa que o momento total do sistema se conserva a cada instante, inclusive durante o processo de colisão.

■ **Forças de ação e reação.** O resultado das variações dos momentos das partículas 1 e 2 expresso pela equação (4.4.4), pode ser colocado de outra forma, usando a formulação da 2^{a} Lei de Newton em termos do momento linear. Segundo a Eq. (4.4.4), o termo $\frac{d\mathbf{p}_1}{dt}$, que é a taxa de variação temporal do momento da partícula 1, representa a força sobre a partícula 1 (devida a 2) durante a colisão, ou seja, $\mathbf{F}_{1(2)}$; analogamente, $\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$ representa a força sobre a partícula 2 (devida a 1) durante a colisão, $\mathbf{F}_{2(1)}$. Logo, a relação $\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$ equivale a

$$\mathbf{F}_{1(2)} = -\mathbf{F}_{2(1)}$$

ou seja, *a força exercida pela partícula* 2 *sobre a partícula* 1 *é igual e contrária àquela exercida pela partícula* 1 *sobre a* 2. Dizemos que se trata de um par *ação-reação*.

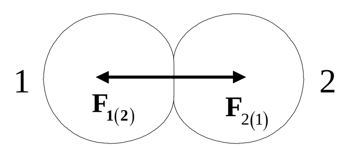


Figura 4.14 Ação e reação.

A Figura 4.14 ilustra a origem dessas forças de contato: durante a colisão, a porção da superfície dos discos em contato se deforma, sofrendo uma compressão; depois vola a se distender, como uma mola.

■ **A 3ª Lei de Newton ou o Princípio da Ação e Reação.** A Eq. (4.5.6-LT), ou seja, $\mathbf{F}_{1(2)} = -\mathbf{F}_{2(1)}$, obtida aqui para interações de contato numa colisão entre duas partículas, é um caso partícular da 3^{a} Lei de Newton, assim enunciada por ele:

> "*A toda ação corresponde uma reação igual e contrária, ou seja, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos".*

Esta lei também é conhecida como o "Princípio da Ação e Reação". É importante notar que a "ação" e a "reação" estão sempre *aplicadas a corpos diferentes*. Na Eq. (4.5.6-LT), $\mathbf{F}_{1(2)}$ é uma força aplicada à partícula 1, e $\mathbf{F}_{2(1)}$ está aplicada à partícula 2.

Oservação: *A 3ª Lei de Newton foi introduzida aqui, a partir do princípio de conservação do momento, para o caso particular de forças de contato. Veremos mais adiante, que para forças que não são de contato, a 3ª Lei de Newton pode deixar de valer. Mas, o princípio de conservação do momento, generalizado convenientemente, permanece sempre válido.*

Exemplos ilustrativos da 3ª Lei de Newton

- **Exemplo 1 (Newton)** *Neste exemplo, citado por Newton, uma pessoa faz pressão com o dedo sobre uma pedra (Figura 4.15), exercendo uma força* $\mathbf{F}_p$ *(note bem:* $\mathbf{F}_p$ *é uma força aplicada à pedra). A reação da pedra sobre o dedo é a força* $\mathbf{F}_d$ *(aplicada ao dedo), que de acordo com a* 3ª *Lei vale* $\mathbf{F}_d = -\mathbf{F}_p$. *Como vimos, esta lei descreve as interações entre duas partículas, que neste caso são a pedra e o dedo.* ***Pergunta-se****: como aparecem essas forças de interação? Em geral, o mecanismo responsável pelas forças nas interações de contato é análogo ao de uma mola: a deformação dos corpos (embora nem sempre seja aparente). Neste exemplo, ao empurrar a pedra, produz-se uma deformação na ponta do dedo onde ela está em contato com a pedra, que dá origem à força* $\mathbf{F}_p$ *aplicada à pedra. Por sua vez, a pedra também sofre uma deformação, extremamente pequena (na escala atômica), da qual decorre a força de reação* $\mathbf{F}_d$ *aplicada ao dedo.*

Resumo: Sistema dedo/pedra (Figura 4.15) ▸		
	Força aplicada:	
Sobre o(a)		Pelo(a)
Dedo	$\{ \mathbf{F}_d$	▸ pedra
Pedra	$\{ \mathbf{F}_p$	▸ dedo

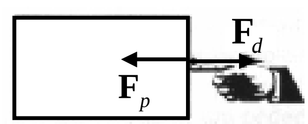


Figura 4.15 Pressão sobre uma pedra.

- **Exemplo 2 – Força-peso.** *Qual é a reação à força-peso* $\mathbf{P}$? *Como esta força representa a atração gravitacional da Terra sobre uma partícula (Figura 4.16), a reação* $-\mathbf{P}$ *representa a atração gravitacional exercida pela partícula sobre a Terra.*

Resumo: Sistema partícula/Terra (Figura 4.16) ▸		
	Forças aplicadas:	
Sobre o(a):		Pelo(a):
Partícula	$\{ \mathbf{P}$	▸ Terra
Terra	$\{ -\mathbf{P}$	▸ partícula

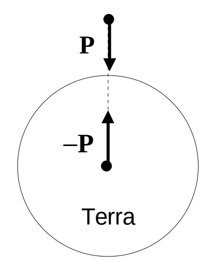


Figura 4.16 Reação à força-peso.

- **Exemplo 3 – Funda.** *No exemplo da funda, a reação à força* $\mathbf{F}$ *exercida pelo fio sobre a pedra (o fio transmite à pedra o puxão de nossa mão) é uma força* $-\mathbf{F}$ *exercida pela pedra sobre o fio e transmitida à nossa mão, que sente o puxão da pedra dirigido radialmente para fora.*

▸ **Exemplo 4 – Partícula sobre uma mesa.** *De acordo com a Figura 4.17, as forças que atuam sobre a partícula são: sua força-peso e a reação de contato da mesa,* $\mathbf{N}$*. Como estão em equilíbrio,*

$$\mathbf{N} = -\mathbf{P}$$

Entretanto, embora sejam iguais e contrárias, a força $\mathbf{N}$ *não é a reação à força-peso,* $\mathbf{P}$*, que é a força aplicada pela Terra sore a partícula. Assim, como vimos no exemplo 2, a reação a* $\mathbf{P}$ *é a força* $-\mathbf{P}$ *aplicada pela partícula sobre a Terra. A força* $\mathbf{N}$ *é a reação da mesa à força* $-\mathbf{N}$ *com que a partícula atua sobre a mesa.*

Resumo: Sistema partícula/mesa (Figura 4.17) ▸

Sobre o(a):	Forças aplicadas:	Pelo(a):
Partícula	$\mathbf{P}$	▸ Terra
	$\mathbf{N}$	▸ mesa
Mesa	$-\mathbf{N}$	▸ partícula
Terra	$-\mathbf{P}$	▸ partícula

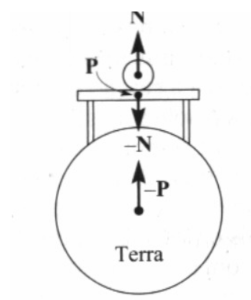


Figura 4.17 Ações e reações de

▸ **Exemplo 5 – Plano inclinado com atrito.** *Nossa experiência mostra que um corpo pode permanecer em equilíbrio sobre uma superfície inclinada (plano inclinado) de um ângulo* θ *que não seja muito grande. Como a resultante da força-peso* $\mathbf{P}$ *e da reação normal* $\mathbf{N}$ *do plano sobre a partícula é uma força tangencial de módulo já calculado na Eq. (4.4.7-LT), que tenderia a fazer o corpo descer ao longo do plano, o equilíbrio exige que o plano também exerça sobre a partícula uma força tangencial* $\mathbf{T}$ *de módulo dado por aquela equação, mas de sentido contrário:*

$$|\mathbf{T}| = Psen\theta = mgsen\theta$$

de tal forma que $\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} = 0$*. A força tangencial* $\mathbf{T}$*, que se chama força de atrito estático, é a reação da superfície do plano (áspera, como qualquer superfície real) à força* $-\mathbf{T}$ *exercida pela partícula tangencialmente ao plano, que tenderia a fazê-la descer.* ***Observação:*** *a força de atrito sempre tende a se opor ao movimento que a partícula teria na ausência de atrito.*

Resumo: Sistema partícula/plano inclinado (Figura 4.18) ▸

Sobre o(a):	Forças aplicadas:	Pelo(a):
Partícula	$\mathbf{P}$	▸ Terra
	$\mathbf{N}$	▸ plano (direção normal)
	$\mathbf{T}$	▸ plano (direção tangencial) (atrito)
Plano	$-\mathbf{N}$	▸ partícula (normal)
	$-\mathbf{T}$	▸ partícula (tangencial)
Terra	$-\mathbf{P}$	▸ partícula (não aparece na figura)

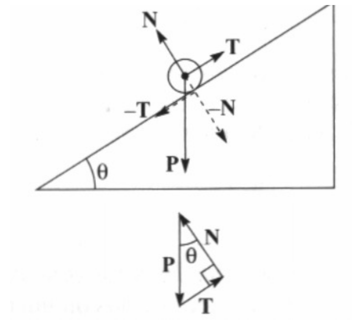


Figura 4.18 Plano inclinado com atrito.

▸ **Exemplo 6 – Cavalo puxando uma pedra.** *A Figura 4.19 mostra os diferentes pares ação-reaçao apenas para forças que atuam na horizontal. As forças verticais (e.g. força-peso e as reações de contato) serão ignoradas neste exemplo, uma vez que não afetam as considerações quanto a equilíbrio ou movimento ao longo de uma estrada horizontal (nosso interesse aqui). As forças horizontais são:*

Ação				**Reação**		
Força	Tipo	Agente	Sobre o(a)	Força	Agente	Sobre o(a)
$\mathbf{F}_c$	tração muscular	cavalo	corda	$-\mathbf{F}_c$	corda	cavalo
$\mathbf{F}_p$	força trasmitida	corda	pedra	$-\mathbf{F}_p$	pedra	corda
$-\mathbf{F}'_a$	força de atrito	cavalo	chão	$\mathbf{F}'_a$	chão	cavalo
$-\mathbf{F}_a$	força de atrito	pedra	chão	$\mathbf{F}_a$	chão	pedra

Na tabela abaixo, fazemos um resumo das forças aplicadas a cada uma das partículas:

Resumo: Sistema cavalo/corda/pedra/chão (Figura 4.19) ▸

Forças horizontais aplicadas:

Sobre o(a):		Pelo(a):
Cavalo	$\mathbf{F}'_a$	▸ chão (atrito)
	$-\mathbf{F}_c$	▸ corda
Corda	$\mathbf{F}_c$	▸ cavalo
	$-\mathbf{F}_p$	▸ pedra
Pedra	$\mathbf{F}_p$	▸ corda
	$\mathbf{F}_a$	▸ chão (atrito)
Chão	$-\mathbf{F}'_a$	▸ cavalo (atrito)
	$-\mathbf{F}_a$	▸ pedra (atrito)

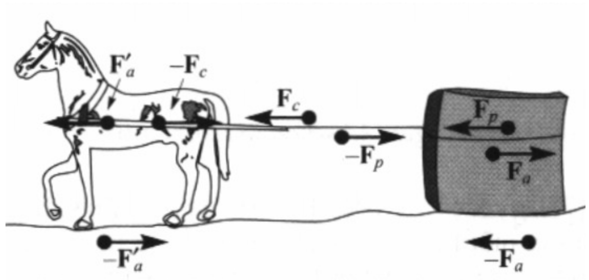


Figura 4.19 Cavalo puxando uma pedra.

Partícula	Forças aplicadas	Força resultante	Aplicando a 2ª Lei de Newton	Observações	
Cavalo	$\mathbf{F}'_a$ e $-\mathbf{F}_c$	$\mathbf{F}'_a - \mathbf{F}_c$	$\mathbf{F}'_a - \mathbf{F}_c = m_c\,\mathbf{a}_c$	m_c e $\mathbf{a}_c$	▸ massa e aceleração do cava
Corda	$\mathbf{F}_c$ e $-\mathbf{F}_p$	$\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_p$	$\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_p = m_{co}\mathbf{a}_{co}$	m_{co} e $\mathbf{a}_{co}$	▸ massa e aceleração da cord
Pedra	$\mathbf{F}_p$ e $\mathbf{F}_a$	$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_a$	$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_a = m_p\mathbf{a}_p$	m_p e $\mathbf{a}_p$	▸ massa e aceleração da pedr

Se o sistema estiver se deslocando como um todo, de forma solidária, então $\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_{co} = \mathbf{a}_p = \mathbf{a},$ onde $\mathbf{a}$ é a aceleração comum a todo o sistema. Neste caso, teremos:

$$(1)\ \mathbf{F}'_a - \mathbf{F}_c = m_c\,\mathbf{a},\quad (2)\ \mathbf{F}_c - \mathbf{F}_p = m_{co}\mathbf{a},\quad (3)\ \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_a = m_p\mathbf{a}$$

▸ **Movimento retilíneo uniforme.** *O regime de movimento retilíneo uniforme, em que* $\mathbf{a} = 0$, *pode ser atingido, quando (das equações acima)*

$$\mathbf{F}'_a - \mathbf{F}_c = 0,\quad \mathbf{F} - \mathbf{F}_p = 0,\quad \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_a = 0$$

ou,

$$\mathbf{F}'_a = \mathbf{F}_c,\quad \mathbf{F}_c = \mathbf{F}_p \text{ e } \mathbf{F}_p = -\mathbf{F}_a$$

que pode ser escrito como,

$$\mathbf{F}'_a = \mathbf{F}_c = \mathbf{F}_p = -\mathbf{F}_a$$

Isto significa que neste regime, todas as forças têm o mesmo módulo (o equilíbrio é um caso particular).

▸ **Cordas ou fios "de massa desprezível".** *Na maioria das vezes, em problemas de dinâmica, adotamos o caso ideal em que cordas ou fios têm massas desprezíveis, uma vez que estas são muito menores do que as demais massas que aparecem no problema. Neste caso, fazemos* $m_{co} = 0$, *e a (2) mostra que se teria sempre* $\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_p$, *o* *que significa que a força de tração do cavalo é transmitida integralmente à pedra pela corda.*

Exercícios resolvidos

Problema 6-LT *Uma bala de fuzil de massa igual a $20g$ atinge uma árvore com velocidade de $500m/s$, penetrando nela a uma profundidade de $10cm$. Calcule a força média (em N e em kgf) exercida sobre a bala durante a penetração.*

Solução *A força de reação da árvore à penetração da bala produz nesta, de acordo com a segunda lei de Newton, uma aceleração, responsável pela variação da sua velocidade. De fato, imediatamente antes de tocar a árvore, a bala tem uma velocidade $v_0 = 500$ m/s, e, após penetrar na árvaro a uma profundidade $\Delta x = 10cm = 0,10m$, sua velociade é nula $(v = 0)$. Como estamos interessados em valores médios, podemos considerar o movimento como uniformemente desacelerado, e usamos, então, a equação de Torricelli para encontrar a aceleração média:*

$$v^2 = v_0^2 - 2a\Delta x \Rightarrow 0 = 250.000 + 2a \times 0,10 \Rightarrow a = \frac{250.000}{0,20} \Rightarrow a = 1,25 \times 10^6 m/s^2$$

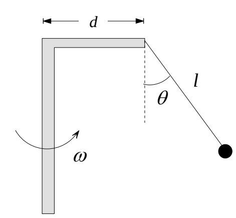
Agora basta aplicar a 2ª Lei de Newton para encontrar a força média que a árvore exerce sobre a bala, ou seja,

$$F = ma \Rightarrow F = 20 \times 10^{-3} \times 1.25 \times 10^6 = 250.000N \Rightarrow F = 2,5 \times 10^4 N$$

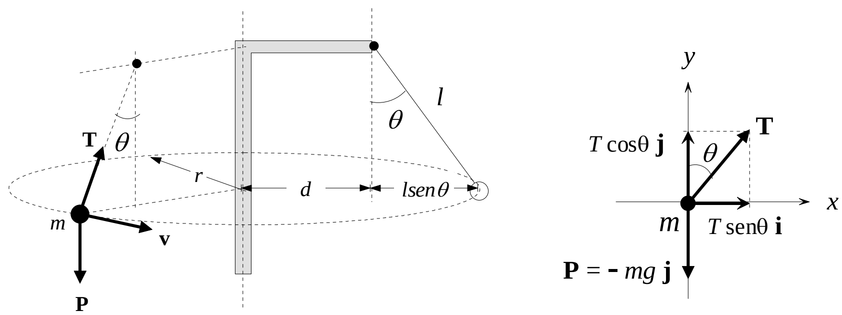
Como $1kgf = 9,8N$, então

$$F = \frac{2,5 \times 10^4}{9,8} = 2,55 \times 10^3 \textit{kgf}$$

Problema 6-LT *O dispositivo da figura gira em torno do eixo vertical com velocidade angular ω. (a) Qual deve ser o valor de ω para que o fio de comprimento l com a bolinha suspensa de massa m faça um ângulo θ com a vertical? (b)Qual é a tensão T no fio nessa situação?*



Solução *As Figuras (a) e (b) mostram só as forças que atuam sobre a partícula num ponto particular de sua trajetória circular num plano horizonal. As direções x e y na figura (b) referem-se a esta posição instantânea da partícula.*



(a) (b)

Como na situação mostrada, não há movimento na direção vertical, as forças que atuam nesta diração estão em equilíbrio. Logo, de acordo com a Figura (b), obtém-se a tensão T no fio:

$$T\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

*(Na verdade, a tensão no fio pedida no problema é a força –**T**, não presente na figura, que a partícula exerce sobre o fio, e não a força **T**, que aparece na figura, que é a força de reação exercida pelo fio sobre a partícula. Mas esta basta para determinar a tensão no fio, uma vez que ambas têm o mesmo módulo.)*

Já na direção x no plano horizontal mostrado na figura, que corresponde em qualquer instante à direção do segmento que liga a partícula ao centro do círculo de raio $r = d + lsen\theta$, a resultante das forças é $F_c = Tsen\theta$, que deve ser capaz de manter a partícula em movimento circular nas condições indicadas na figura, e é portanto a força centrípeta. Assim, de acordo com a 2ª lei, $F_c = ma_c$, onde $a_c = \omega^2 r$ é a aceleração centrípeta, temos

$$Tsen\theta = m\omega^2 r \Rightarrow \frac{mg}{\cos\theta} sen\theta = m\omega^2 (d + lsen\theta)$$

$$\omega^2 = \frac{g\ tg\theta}{d + lsen\theta} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g\ tg\theta}{d + lsen\theta}}$$

Portanto, as respostas são: (a) $\omega = = \sqrt{\frac{g\ tg\theta}{d + lsen\theta}}$ *e (b)* $T = \frac{mg}{\cos\theta}$.