Capítulo 3

MOVIMENTO BIDIMENSIONAL

Livro-Texto: *Curso de Física Básica-Mecânica*, H. Moysés Nussenzveig (4ª. Edição,2003)

Atenção Estas notas têm por finalidade auxiliá-lo no estudo dos assuntos tratados no livro-texto (Física Básica-Mecânica de H. Moysés Nussenzveig) e não devem ser usadas com o intuito de substituí-lo. A leitura do livro-texto é imprescindível!

■ Resumo do Capítulo

Aqui você tem uma visão geral sobre o assunto deste capítulo

Neste capítulo, vamos dar continuidade ao estudo do movimento, tratando o movimento no plano (ou movimento bidimensional). A generalização dos conceitos de grandezas físicas tais como **deslocamento**, **velocidade** e **aceleração**, introduzidas no capítulo anterior, será feita aqui com o auxílio de vetores.

Você já deve saber que um vetor é usado na física para representar grandezas que, para serem completamente determinadas, não basta conhecermos apenas um número (módulo), mas que precisam de informações adicionais (direção e sentido) para serem caracterizadas. São exemplos destas *grandezas vetoriais* o deslocamento, a velocidade, a aceleração e a força etc. (Para outras, as *grandezas escalares,* como distância, massa, tempo e energia, basta um número para serem caracterizadas).

Mas o principal motivo para o uso de vetores na física é o seu caráter *intrínseco* para a representação de uma grandeza vetorial, que se reflete na sua independência em relação aos sistemas de coordenadas. Considere por exemplo a localização de um ponto P no plano, utilizando-se um sistema de coordenadas cartesianas, Oxy. Neste sistema, a posição deste ponto é feita através de um par de números (x,y), conhecido como coordenadas do ponto P. Já sabemos também que a escolha de um sistema de coordenadas é completamente arbitrária e, esta arbitrariedade nos permite escolher a orientação dos eixos coordenados em qualquer direção no plano. Mas, é óbvio que, mudando-se a orientação dos eixos Ox e Oy, do sistema Oxy, por exemplo, através de uma rotação destes eixos em torno da origem O, então, no novo sistema, que designaremos por $Ox'y'$, as coordenadas do mesmo ponto P tornam-se agora (x',y'), diferentes daquelas que foram medidas no sistema original Oxy. Isto acontece porque esta maneira de localizar o ponto no plano através de suas coordenadas, depende obviamente do sistema de coordenadas que foi adotado. Assim, se uma lei da física depender de quantidades deste tipo, sua formulação matemática vai depender do sistema de coordenadas escolhido para representá-la, o que será diferente para cada caso. Como veremos neste capítulo, o uso de vetores para representar essas grandezas, elimina esta arbitrariedade na formulação de uma lei física por serem entidades matemáticas, cuja representação geométrica é independente de sistemas de coordenadas.

Mas, isto não significa que devemos simplesmente abolir os sistemas de coordenadas. Embora sendo independente deles, sempre é possível relacionar um vetor a um dado sistema de coordenadas, através de suas projeções sobre este sistema, ao que chamamos *decomposição do vetor* neste sistema. Por exemplo, v. vai aprender que com o uso da decomposição de um vetor num sistema de coordenadas é muito mais simples realizar operações, tais como soma e diferença de vetores, do que fazê-las geometricamente sem o uso de coordenadas.

Em seguida, vamos utilizar o conceito de vetor para definir grandezas como deslocamento, velocidade e aceleração (médias e instantâneas) no plano. Vamos aplicar essas definições ao estudo do movimento para o caso particular em que a aceleração instantânea (vetor) do objeto é constante ($\mathbf{a} =$ constante), conhecido como *movimento uniformemente acelerado*. A conclusão deste estudo é que o movimento mais geral possível, quando $\mathbf{a} =$ constante, é um movimento plano. Em outras palavras, quando $\mathbf{a} =$ constante, a trajetória da partícula está contida num plano definido por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{v}_0$ (velocidade inicial).

Como aplicação destes resultados, vamos considerar o caso particular que resulta no movimento retilíneo já estudado no capítulo anterior. Procure entender que isto acontece, quando os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{v}_0$ são paralelos entre si (ou seja, têm a mesma direção).

Outra aplicação dos resultados para $\mathbf{a} =$ constante é o *movimento de projéteis*. Mas, para que isto seja possível, devemos fazer duas aproximações: (1) desprezar a resistência do ar (considerando o movimento no vácuo) e (2) desprezar a variação da aceleração da gravidade (considerando o movimento próximo à superfície da Terra).

Outro tipo importante de movimento plano é o movimento circular. Quando estudarmos o *movimento circular uniforme*, aquele em que o módulo da velocidade é constante, você deve estar atento para reconhecer que se trata de um movimento acelerado, muito embora o valor da velocidade do objeto não varie. Neste caso, a aceleração tem origem na variação da direção do vetor velocidade (que é um vetor cuja direção é sempre tangente à trajetória circular em que se dá o movimento do objeto). Como consequência, vamos mostrar que o vetor aceleração está sempre apontando para o centro da trajetória circular, razão pela qual chama-se *aceleração centrípeta*. Como esta direção é sempre perpendicular à tangente em qualquer ponto da trajetória, a aceleração centrípeta é sempre perpendicular à velocidade da partícula, e, portanto, não tem influência sobre o módulo da velocidade.

Uma característica importante deste movimento circular é a regularidade com que o objeto descreve sua trajetória. Esta regularidade se reflete na constância do tempo gasto pelo objeto sempre que realiza um percurso completo sobre sua trajetória e, por isso, é um *movimento periódico*. O movimento circular uniforme é o primeiro exemplo de movimento periódico que estudamos. Uma grandeza importante neste tipo de movimento é o que se chama *período* (T), que é definido como o tempo que o objeto leva para completar uma volta sobre a circunfência. Outras grandezas importantes relacionadas com o período são frequência e velocidade angular. Procure entender bem esses conceitos que serão muito úteis ao longo do curso.

Ao tratar o *movimento circular acelerado,* onde tanto o módulo como a direção da velocidade variam, vamos mostrar que a aceleração do movimento pode ser decomposta em duas outras, conhecidas como acelerações *tangencial* e *normal*, sendo que a aceleração tangencial é a responsável pela variação do módulo do vetor velocidade, e a aceleração normal, pela variação da sua direção. Estes resultados são então aplicados para o caso especial em que o módulo da aceleração tangencial é constante, conhecido como *movimento circular uniformemente acelerado.*

Além desses movimentos com trajetórias simples (como o movimento retilíneo, parabólico e circular) você também vai aprender como descrever um movimento plano geral, onde a trajetória pode ser qualquer curva.

O assunto final deste capítulo é sobre *velocidade relativa,* que está relacionado com um tema mais amplo referido como *movimento relativo*. Quando começamos a estudar movimento, no Capítulo 2, alertamos para o fato de que este é um conceito relativo, ou seja, que depende da escolha de um referencial para ser descrito. O estudo sistemático da relatividade dos movimentos será abordado em outro capítulo. O objetivo desta seção é apenas introduzir o conceito de *velocidade relativa*, que é uma ferramenta muito útil na formulação daquele estudo mais amplo.

Como o próprio nome sugere, o termo velocidade relativa é usado para indicar a velocidade de um objeto (2) em relação ao objeto (1), quando conhecemos as velocidades dos dois objetos em relação a um dado referncial O. Até aqui, nosso estudo tratou apenas do movimento um único objeto em relação a um referencial. Nesta seção, vamos estender nosso formalismo para descrever movimentos simultâneos de dois ou mais objetos em relação a um dado referencial. Por exemplo, sabemos que ao soltar um objeto em um ônibus em movimento, o objeto descreverá uma trajetória retilínea vertical, em relação ao ônibus, que seria a mesma no caso do ônibus parado (semelhante ao que acontece com o navio de Galileu). Mas como relacionar este movimento a um observador que está em repouso na plataforma? Como veremos, questões como estas podem ser respondidas com o conceito de velocidade relativa.

■ Assunto: Movimento Bidimensional

Aqui você fica sabendo quais os assuntos que serão tratatados nas aulas sobre este capítulo.

Seção 3.1 Descrição em termos de coordenadas

Seção 3.2 Vetores

Seção 3.3 Componentes de um vetor

Seção 3.4 Velocidade e aceleração vetoriais

Seção 3.5 Movimento uniformemente acelerado

Seção 3.6 Movimento dos projéteis

Seção 3.7 Movimento circular uniforme

Seção 3.8 Acelerações tangencial e normal

Seção 3.9 Velocidade relativa

■ Objetivos Específicos

Ler apenas não basta: certifique-se sempre de que você está aprendendo. Resolva uma quantidade razoável de problemas do capítulo.

Ao término deste capítulo, verifique se você é capaz de:

- descrever o movimento em termos de coordenadas ou com auxílio de vetores.
- entender o que é vetor e saber representá-lo geometricamente sem auxílio de um sistema de coordenadas.
- saber algumas as regras básicas da álgebra vetorial para composição de vetores.
- entender o conceito de vetor unitário na direção de um dado vetor e saber usá-lo para representar aquele vetor.
- saber relacionar o vetor a um sistema de coordenadas, através de suas componentes, usando o conceito de vetores unitários nas direções dos eixos coordenados.
- conceituar velocidade e aceleração vetoriais.
- representar e interpretar graficamente os vetores velcidade média e velocidade instantânea.
- calcular o vetor velocidade instantânea como um processo limite do vetor velocidade média.
- conceituar vetor aceleração média e vetor aceleração instantânea, sabendo distinguir um do outro.
- representar e interpretar geometricamente os vetores aceleração média e aceleração instantânea.
- calcular o vetor aceleração instantânea como um processo limite do vetor aceleração média.
- entender que o movimento mais geral quando o vetor aceleração é constante é um movimento plano, sabendo aplicar os resultados para descrever o movimento retilíneo (uniforme e uniformemente acelerado) e o movimento

de projéteis.

- entender, através do movimento circular uniforme, como a aceleração pode influenciar apenas a variação da direção da velocidade, mantendo o módulo desta constante.
- entender o conceito de movimento periódico, sabendo calcular período, frequência e velocidade angular.
- entender, através do movimento circular acelerado, como a aceleração pode ser decomposta em acelerações tangencial e normal, sabendo distinguir o efeito de cada uma delas
- descrever o movimento plano através de uma trajetória qualquer.
- entender o que é velocidade relativa e saber aplicar seus conceitos.

■ Guia de Estudo

Nesta seção, discutimos alguns assuntos apresentados no livro-texto, visando uma abordagem, sempre que possível, complementar

Seção 3.1 Descrição em termos de coordenadas

Neste capítulo, vamos estudar o movimento no plano (duas dimensões), que inclui muitos casos importantes como o movimento de projéteis, movimento da Terra em torno do Sol (movimento circular) etc. Como fizemos no caso do movimento unidimensional, vamos começar escolhendo um referencial para especificar a localização de um ponto do móvel. A localização de um ponto num plano, como sabemos, é feita através de dois parâmetros que são suas coordenadas em relação ao referencial. Se adotarmos um sistema de coordenadas cartesianas, a posição de uma partícula em movimento no plano será descrito pelo par de funções

$$(x(t), y(t))$$

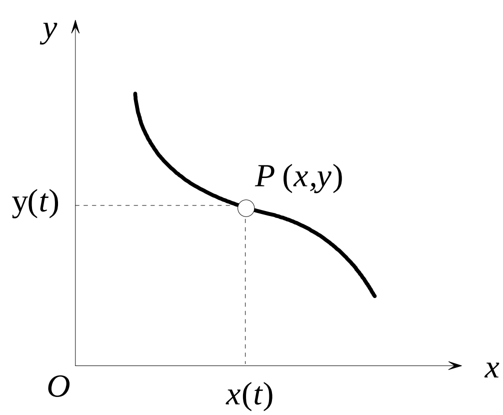


Figura 3.1 Movimento num plano - coordenadas retangulares

onde $x(t)$ é a abcissa e $y(t)$, a coordenada da partícula no instante t. Podemos observar que, à medida que o ponto P se move, descrevendo a trajetória da partícula no plano, suas projeções sobre os eixos Ox e Oy se movem, em correspondência ao movimento da partícula, descrevendo movimentos unidimensionais. Desta maneira, pode-se reduzir o movimento bidimensional a dois movimentos unidimensionais simultâneos, cuja composição leva ao movimento no plano.

Independência dos movimentos

Os movimentos ao longo de dois eixos ortogonais, como os que foram obtidos pela projeção sobre os eixos Ox e Oy do movimento da partícula ao longo de sua trajetória, podem *em algumas situações* ser considerados independentes entre si. Em outras palavras, isto significa que o movimento ao longo do eixo dos y não é afetado pelo movimento ao longo do eixo dos x, podendo cada um desses movimentos ser tratado isoladamente, o que facilita bastante o estudo do movimento no plano, uma vez que os movimentos das projeções seguem as propriedades do movimento unidimensional já estudado no capítulo anterior. Existem exemplos importantes onde podemos aplicar a independência dos movimentos, tais como, movimento de projéteis (na ausência da resistência do ar) e movimento circular, que estudaremos neste capítulo.

Galileu foi o primeiro a reconhecer esta independência e usá-la para descrever corretamente pela primeira vez o movimento de projéteis e, também, para refutar um dos principais argumentos usados pelos seguidores de Ptolomeu para provar a imobilidade da Terra. No LT, v. pode acompanhar uma série de exemplos dados por Galileu em que ele usa esta propriedade.

Apesar da importância desta propriedade nos exemplos estudados, ela **não** se aplica a todos os movimentos. Por exemplo, no caso do movimento de projéteis em que levamos em conta a resitência do ar, os movimentos ao longo dos eixos ortogonais se acoplam de tal maneira que o movimento ao longo do eixo y depende do movimento ao longo do eixo x e, portanto, essa independência deixa de valer. Mas, mesmo nos casos em que a independência dos movimentos perde a validade, é possível tratar o movimento da partícula no plano decompondo-o em dois movimentos unidimensionais simultâneos ao longo dos eixos ortogonais considerados.

Seção 3.2 Vetores

Uma outra maneira de descrever o movimento mostrado na Figura 3.1 é considerar um sistema de coordenadas polares, definido por uma origem O, em relação à qual se mede a distância r do ponto P, e uma direção de referência Ox, em relação à qual se mede a direção θ do segmento de reta OP. Assim, a posição da partícula em cada instante será descrita também pelo par de funções

$$(r(t), \theta(t))$$

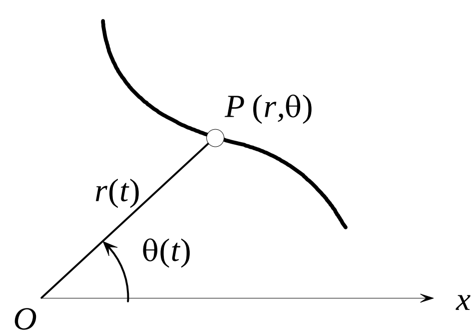


Figura 3.2 Movimento num plano - coordenadas

Como v. já pode estar pensando, existem muitas possibilidades de descrever este *mesmo* movimento, mudando-se por exemplo a posição da origem e a orientação do eixo Ox na Figura 3.2, ou a orientação dos eixos Ox e Oy na Figura 3.1. Em todos os casos, as coordenadas do ponto, $(x(t), y(t))$ ou $(r(t), \theta(t))$, mudam com a nova configuração, e isto pode nos levar a pensar erroneamente que em cada um desses casos o movimento resultante, obtido através da composição dos movimentos em cada uma das coordenadas, seja diferente para cada configuração, isto é, que o movimento da partícula dependa *intrinsicamente* do sistema de coordenadas que estamos utilizando. Porém, como se pode deduzir olhando diretamente para a trajetória, esta conclusão é **incorreta**, o que nos permite dizer que o sistema de coordenadas tem um papel secundário (ou acessório) na descrição do movimento.

Existe, no entanto, uma forma intrínseca de descrever o movimento, que não depende da escolha de sistemas de coordenadas, feita com o auxílio do conceito de **vetores**.

Grandezas escalares e vetoriais

Quando estudamos física, nos deparamos com pelo menos dois tipos de grandezas com características diferentes. Existem grandezas, como o número de bolas numa caixa, que são conhecidas como *grandezas escalares*. Para que essas grandezas fiquem completamente determinadas, basta conhecer apenas um número, que indica sua quantidade ou magnitude (ou módulo). São exemplos de grandezas escalares o *tempo*, a *massa* e a *energia*.

Para outras grandezas importantes na física, como *posição*, *deslocamento*, *velocidade* e *aceleração*, não basta conhecermos apenas o número que indica a *magnitude* da grandeza; precisamos também de outras informações como a *direção* e o *sentido* em que elas atuam. Grandezas deste tipo são conhecidas como *grandezas vetoriais* e são representadas por vetores.

Vetor posição e vetor deslocamento

Vamos voltar ao problema da localização de um ponto no plano usando um sistema de coordenadas cartesianas. Em relação ao sistema Oxy as coordenadas do ponto P são (x,y). Ao passarmos do sistema Oxy para o sistema $Ox'y'$ fazendo uma rotação de eixos daquele sistema em torno da origem O, por um ângulo φ, as coordenadas do mesmo ponto P mudam para (x',y'), conforme mostra a Figura 3.3. Por exemplo, se o ponto P tem coordenadas $(3,5)$ no sistema Oxy, as coordenadas deste ponto no sistema $Ox'y'$ mudam para $(5,1, 2,8)$, quando $\varphi = 30^\circ$, ou para $(5,7, 1,4)$, no sistema $Ox''y''$ quando $\varphi = 45^\circ$ e assim por diante.

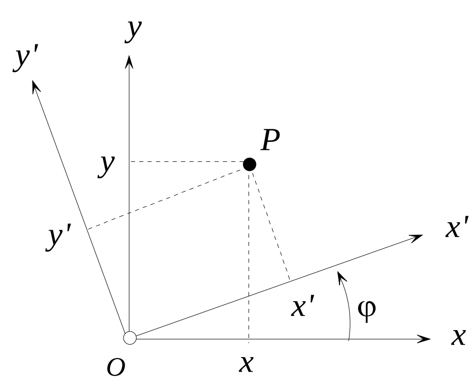


Figura 3.3 Sistemas de coordenadas

É óbvio da figura acima que o ponto P no plano continua o mesmo, tendo mudado apenas os pares de números que o localizam nos diferentes sistemas de coordenadas. A questão é: *como expressar matematicamente o fato de que diferentes pares de números* (x,y), (x',y') e (x'',y'') *representam a mesma "coisa"*? A resposta está no conceito de **vetor**.

Vetor posição Graficamente um vetor é representado por um segmento de reta orientado. O comprimento desse segmento de reta representa o módulo do vetor nas unidades adotadas. No caso do vetor expressar a localização do ponto P, este segmento é o $\overline{OP}$ mostrado na Figura 3.4, que vai desde a origem O até o ponto P. Simbolicamente, representa-se este vetor pela letra $\mathbf{r}$ em **negrito** ou por $\vec{r}$, sendo esta última a forma mais usada em manuscritos. A *magnitude* ou *módulo* de um vetor representa-se por $|\mathbf{r}|$ ou simplesmente por r. Assim definido, dizemos que o vetor $\mathbf{r}$ é o *vetor posição* do ponto P em relação à origem O (ou, como diz o LT, é o *vetor deslocamento* do ponto P em relação à origem O).

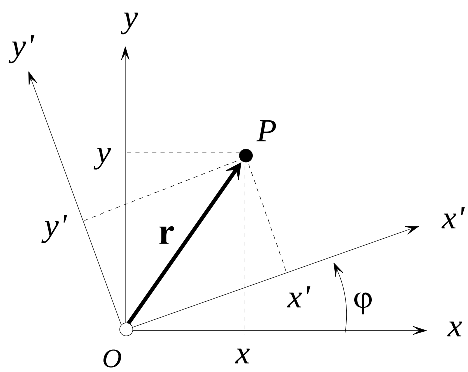


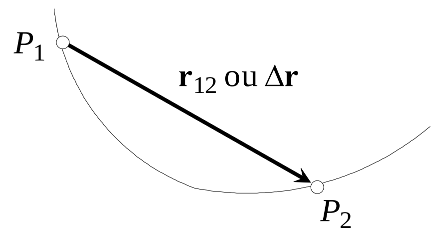
Figura 3.4 Representação gráfica de um vetor

Mas o que significa o símbolo $\mathbf{r}$? Pelo que já vimos sobre a localização de um ponto no plano, $\mathbf{r}$ não pode representar um único número, mas sim *dois números,* x e y (ou *três números*, x, y e z, no espaço tridimensional). Exemplo disto, são as coordenadas $(3,5)$ do ponto P no sistema de coordenadas Oxy. Mas não são só esses números que o símbolo $\mathbf{r}$ representa: ele também representa o par $(5,1,2,8)$ no sistema $Ox'y'$ ou o par $(5,7,1,4)$ no sistema $Ox''y''$ e assim por diante. Ou seja, o símbolo $\mathbf{r}$ representa a posição do ponto P independentemente de um sistema de coordenadas e esses pares de números são apenas as projeções do vetor $\mathbf{r}$ nas direções dos eixos considerados. Denotando essas projeções por r_x e r_y no sistema Oxy, r'_x e r'_y no sistema $Ox'y'$ e r''_x e r''_y no sistema $Ox''y''$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} r_x &= 3 & r_y &= 5 \\ r'_x &= 5,1 & r'_y &= 2,8 \\ r''_x &= 5,7 & r''_y &= 1,4 \end{aligned}$$

Assim, podemos podemos relacionar um vetor com um sistema de coordenadas através de suas projeções: $\mathbf{r} = (r_x, r_y)$. Mais tarde voltaremos à discussão sobre as projeções de vetores nas direções dos eixos coordenados.

Vetor deslocamento Outro vetor muito importante na física é aquele que expressa o deslocamento de uma partícula sobre a trajetória, entre os pontos P_1 e P_2, que é representado graficamente pelo segmento de reta orientado que vai diretamente do ponto P_1 ao ponto P_2 como mostra a Figura 3.5. A este vetor damos o nome de *vetor deslocamento* entre os pontos P_1 e P_2 (ou, como diz o LT, *vetor deslocamento relativo* do ponto P_2 em relação ao ponto P_1) e denotamos pelo símbolo $\mathbf{r}_{12}$ ou $\Delta\mathbf{r}$.



Operações com vetores

As operações (soma, subtração etc) com quantidades escalares seguem as regras da álgebra usual. Queremos agora saber como realizar essas operações com vetores. Sabemos que, diferentes das grandezas escalares, os vetores representam quantidades que têm, além da magnitude ou módulo, uma direção e um sentido. Assim, quando somarmos duas dessas grandezas devemos levar em conta todos esses fatores. Isto significa que as operações algébricas não podem ser aplicadas aos vetores e, portanto, outras regras precisaram ser "inventadas" exclusivamente para essa finalidade. Essas regras ou leis fazem parte da *álgebra vetorial*, cujas propriedades básicas apresentamos a seguir.

Soma de vetores

Regra do paralelogramo Geometricamente, a soma de dois vetores é obtida unindo a origem do primeiro à extremidade do segundo vetor, ou, o que é equivalente, pela "regra do paralelogramo", tomando a diagonal do paralelogramo construído sobre os vetores. Por exemplo, sejam dois vetores (deslocamentos) arbitrários $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ como mostrado na Figura 3.5(a). Chama-se vetor resultante $\mathbf{r}$ a "soma" dos vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ e representamos por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$$

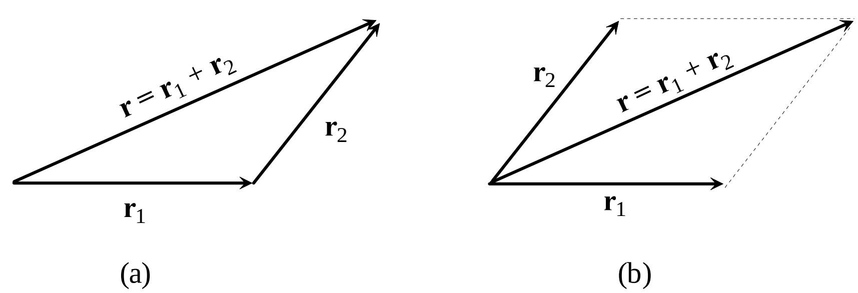


Figura 3.5 (a) Deslocamento resultante e (b) regra do paralelogramo.

Na Figura 3.5(b) representamos o mesmo vetor (deslocamento) resultante, mas usando a regra do paralelogramo.

Soma de vários vetores Quando se tem vários de vetores, a soma pode ser obtida, geometricamente, unindo-se a origem do primeiro à extremidade do último vetor, como mostra a Figura 3.6 para quatro vetores, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ e $\mathbf{r}_4$. A "soma" $\mathbf{r}$ desses vetores é representada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4$$

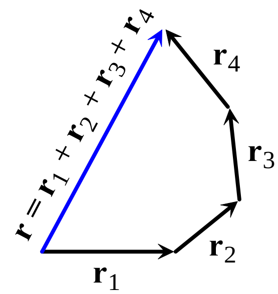


Figura 3.6 Soma de vários vetores

Propriedade comutativa Note que, com a definição geométrica dada acima, a soma de vetores possui a propriedade comutativa, isto é,

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1$$

como pode ser visto facilmente na Figura 3.7.

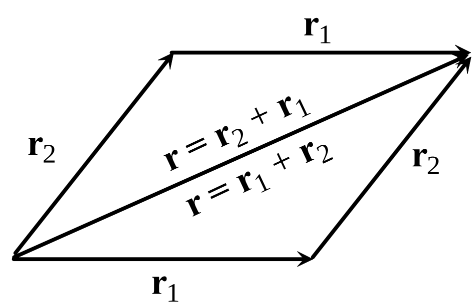


Figura 3.7 Propridade comutativa da soma de vetores

Propriedade associativa Além da propriedade comutativa, a soma de vetores também possui a propriedade associativa, isto é,

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) + \mathbf{r}_3$$

A Figura 3.8 mostra esta propriedade.

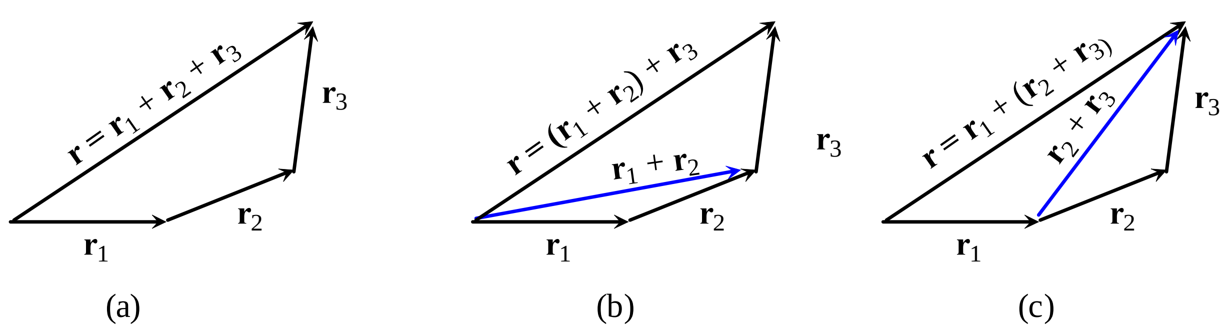


Figura 3.8 Propriedade associativa da soma de vetores

Diferença de dois vetores

Vetor nulo Para representar um deslocamento onde o móvel retorna ao mesmo ponto de partida, vamos definir o vetor nulo, que designamos por $\mathbf{0}$. Assim, para qualquer vetor $\mathbf{r},$ vale a relação

$$\mathbf{r} + \mathbf{0} = \mathbf{r}$$

Expressa de outra forma,

$$\mathbf{r} + (-\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

isto significa que a soma de um vetor $\mathbf{r}$ com um vetor $-\mathbf{r}$ resulta sempre no vetor nulo $\mathbf{0}$.

Vetor oposto Das considerações acima, podemos concluir que, para cada vetor $\mathbf{r},$ existe o vetor $-\mathbf{r},$ chamado *vetor oporto* de $\mathbf{r},$ que no caso do vetor deslocamento, leva sempre ao ponto de partida. O vetor oposto $-\mathbf{r}$ difere do vetor $\mathbf{r}$ apenas pelo sentido, como mostra a Figura 3.9.

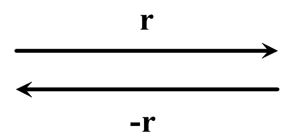


Figura 3.9 Deslocamento oposto

Diferença de dois vetores A definição de vetor oposto nos permite definir a *diferença* de dois vetores. Considere que se queira calcular a diferença de dois vetores, $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2,$ na forma $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$ Para efetuar esta diferença, somamos $\mathbf{r}_2$ com o vetor oposto de $\mathbf{r}_1,$ isto é,

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + (-\mathbf{r}_1)$$

Graficamente, a Figura 3.10 mostra como obter essa diferença: em (a) toma-se o oposto de $\mathbf{r}_1$; em (b) soma-se $\mathbf{r}_2$ com $-\mathbf{r}_1$ através da regra do paralelogramo e em (c) desloca-se esse vetor "soma" para as extremidades de $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$.

Em resumo: Para obter graficamente a diferença de dois vetores, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$ devemos unir a extremidade do vetor $\mathbf{r}_1$ à extremidade do vetor $\mathbf{r}_2,$ o que corresponde à outra diagonal na "regra do paralelogramo".

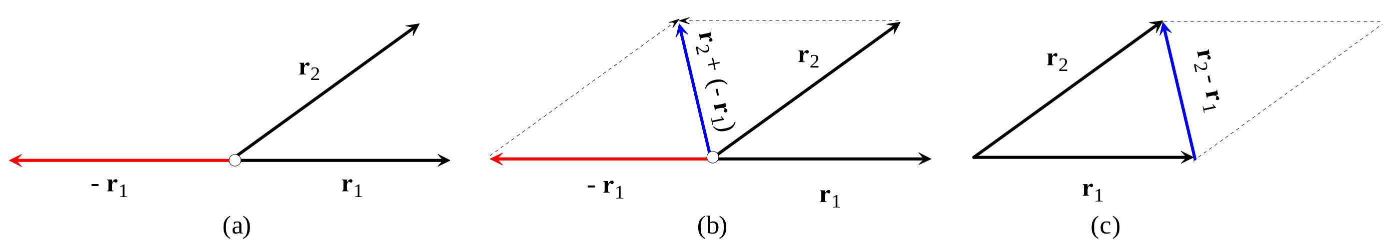
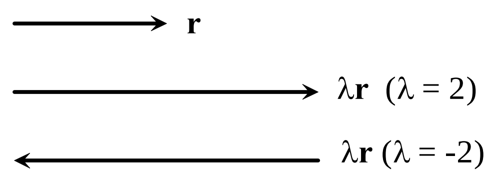


Figura 3.10 Diferença de dois vetores

Produto de um vetor por um escalar

Outra regra importante da álgebra vetorial é a que trata do produto entre vetores e escalares. Seja o número $\lambda > 0$. O produto $\lambda\mathbf{r}$ é um vetor que tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{r},$ mas de módulo λ vezes maior. Se $\lambda < 0$ o sentido inverte. A Figura abaixo mostra os casos em que $\lambda = 2$ (positivo) e $\lambda = -2$ (negativo).



Produto entre vetores e escalares.

Com esta definição, obtém imediatamente as identidades

$$\lambda(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \lambda\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2$$

$$(\lambda + \mu)\,\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} + \mu\mathbf{r}$$

Toda grandeza que não é escalar é uma grandeza vetorial?

Da forma como classificamos as grandezas físicas, pode parecer que toda grandeza que tem um módulo, uma direção e um sentido sempre pode ser representada por vetor. *É importante observar que isto apenas não basta para atribuir a essa grandeza um caráter vetorial. É preciso que ela obedeça as leis de composição consideradas acima, com todas as suas propriedades (comutatividade, associatividade* etc*).*

Rotação por um ângulo finito não é um vetor Para ilustrar o caso de uma grandeza que possui módulo, direção e sentido, mas que não pode ser representada por um vetor, considere a rotação (p.ex., de um livro), por um ângulo finito θ em torno de um eixo (ver Figura 3.11). Ao tentar associar-lhe um "vetor" "$\boldsymbol{\theta}$", poderíamos atribuí-lo um módulo como sendo o ângulo de rotação θ, uma direção, como sendo a direção do eixo de rotação e um sentido, como sendo o sentido de rotação (horário ou anti-horário, quando visto da extremidade orientada do eixo). Na parte direita da Figura 3.11 mostramos também uma vista de cima indicando que a rotação indicada tem o sentido anti-horário. Entretanto, embora "$\boldsymbol{\theta}$" tenha um módulo, uma direção e um sentido, **não** é um vetor, uma vez que, como veremos no exemplo a seguir, não satisfaz todas as propriedades dos vetores discutidas anteriormente.

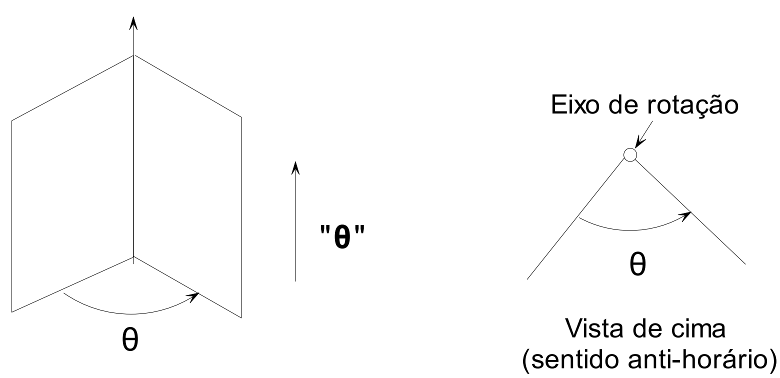
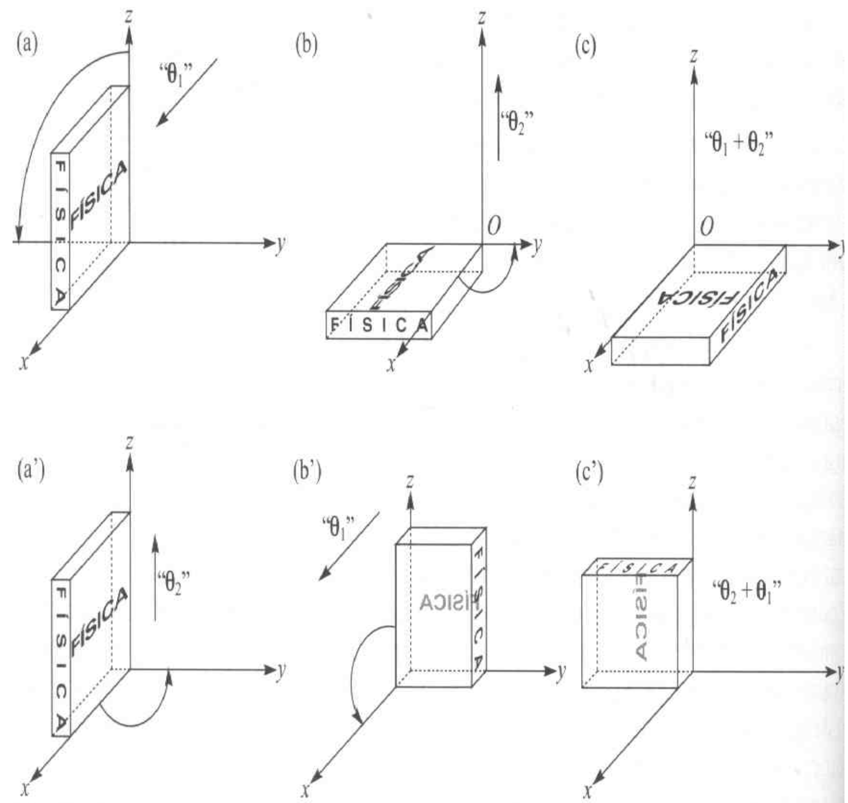


Figura 3.11 Representação de rotação finita.

Para ver isto, considere duas rotações finitas de um objeto (livro), representadas por "$\boldsymbol{\theta}_1$" e "$\boldsymbol{\theta}_2$", em torno de dois eixos diferentes. Na Figura 3.12, "$\boldsymbol{\theta}_1$" é uma rotação de $+90$º em torno do eixo Ox e "$\boldsymbol{\theta}_2$" é uma rotação de $+90$º em torno do eixo Oz. Nas partes (a), (b) e (c) desta figura, primeiro aplicamos a rotação "$\boldsymbol{\theta}_1$" (em relação ao eixo Ox) e em seguida a rotação "$\boldsymbol{\theta}_2$" (em torno do eixo Oz), sendo que a composição dessas duas rotações consecutivas deveria ser representada pelo "vetor" soma "$\boldsymbol{\theta}_1$" + "$\boldsymbol{\theta}_2$", cujo efeito é indicado pela posição do livro em (c).



Por outro lado, se aplicarmos primeiro "$\boldsymbol{\theta}_2$", e, em seguida, "$\boldsymbol{\theta}_1$", como mostrado nas partes (a'), (b') e (c') da figura, a composição dessas duas rotações deveria ser representada pelo "vetor" soma "$\boldsymbol{\theta}_2$" + "$\boldsymbol{\theta}_1$", cujo efeito também é indicado pela posição do livro em (c'). Comparando os efeitos nas figuras (c) e (c'), que mostram o livro em diferentes posições após as duas sequências de rotações, conclui-se facilmente que

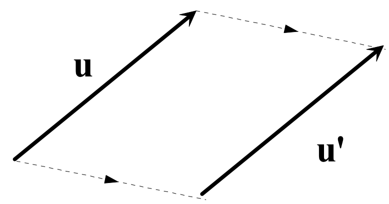
$$\text{“}\boldsymbol{\theta}_1\text{”} + \text{“}\boldsymbol{\theta}_2\text{”} \neq \text{“}\boldsymbol{\theta}_2\text{”} + \text{“}\boldsymbol{\theta}_1\text{”}$$

Ou seja, *a operação de composição de duas rotações finitas que deveria corresponder ao "vetor" soma não satisfaz à propriedade comutativa da soma de dois vetores.* Logo, as rotações finitas **não são vetores**.

Seção 3.3 Componentes de um vetor

Vimos que um vetor pode ser definido independentemente de um sistema de coordenadas. Mas sempre podemos relacionar o vetor com um sistema de coordenadas, definindo suas componentes em relação a esse sistema. Por enquanto vamos nos limitar a vetores no plano.

Um vetor não está associado a uma origem particular Uma propriedade importante dos vetores é que estes não estão associados a uma origem determinada. Isto significa que, se um vetor $\mathbf{u}'$ for obtido do vetor $\mathbf{u}$ através de uma translação, então podemos afirmar que esses dois vetores são iguais: $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$.



Vetores iguais obtidos pela translação de **u.**

Componentes de um vetor Seja **u** um vetor qualquer e tomamos a origem de **u** no ponto O (origem das coordenadas). Devido à propriedade anterior, isto não introdução nenhuma restrição, uma vez que um vetor não tem uma origem específica.

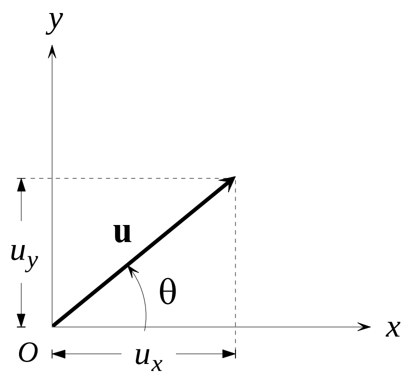


Figura 3.13 Componentes de um vetor

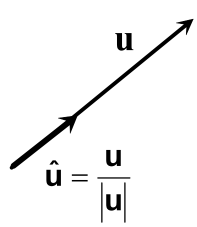
Chamam-se *componentes* de **u** segundo os eixos Ox e Oy as projeções u_x e u_y de **u** sobre esses eixos (ver Figura 3.13). Desta figura, vê-se facilmente que o módulo do vetor **u** é dado por (teorema de Pitágoras)

$$|\mathbf{u}| = u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Vetor unitário Chama-se *vetor unitário* um vetor que tem módulo igual a 1. Costuma-se designar um vetor unitário na direção do vetor **u** por $\hat{\mathbf{u}}$, de forma que, pela definição, temos

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{\mathbf{u}}{u}$$

Este vetor unitário está representado na figura abaixo.



Vetor unitário na direção de **u**

Com esta definição de vetor unitário, e devido à propriedade do produto de um vetor por um escalar, qualquer vetor **u** pode sempre ser escrito como o produto de seu módulo pelo vetor unitário na sua direção. Ou seja,

$$\mathbf{u} = |u|\ \hat{\mathbf{u}} = u\ \hat{\mathbf{u}}$$

Vetores unitários i e j Os vetores unitários muito importantes são aqueles associados com as direções de Ox e Oy sistema de coordenadas cartesianas, e são designados por $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ respectivamente (ou então por $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$). Com eles é possível escrever as componentes de qualquer vetor $\mathbf{u}$ ao longo das direções Ox e Oy, ou seja,

$$\mathbf{u}_x = u_x\mathbf{i} = u_x\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{u}_y = u_y\mathbf{j} = u_y\hat{\mathbf{y}}$$

Decomposição de um vetor A Figura 3.14 mostra a decomposição de um vetor $\mathbf{u}$ em dois outros vetores $\mathbf{u}_x$ e $\mathbf{u}_y$ ao longo dos eixos coordenados. Usando a regra do paralelogramo podemos escrever simbolicamente

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y$$

Com a ajuda dos vetores unitários nas direções dos eixos, esta soma pode ser expressa como

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} = u_x\hat{\mathbf{x}} + u_y\hat{\mathbf{y}}$$

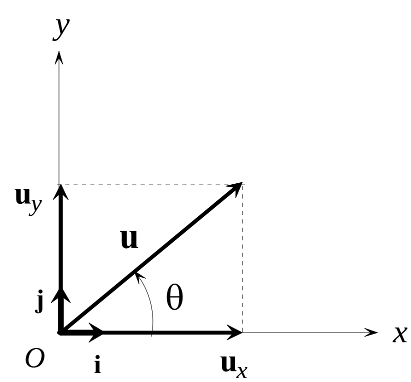


Figura 3.14 Decomposição de um vetor

Se θ é o ângulo entre $\mathbf{u}$ e Ox, da Figura 3.13 obtemos

$$u_x = |\mathbf{u}|\ \cos\theta = u\cos\theta$$

$$u_y = |\mathbf{u}|\ \operatorname{sen}\theta = u\operatorname{sen}\theta$$

ou seja, as componentes $\mathbf{u}$ neste sistema de coordenadas, o que nos permite também escrever

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{u_x}{u} = \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{u_y}{u} = \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \end{aligned}\right\} \operatorname{tg}\theta = \frac{u_y}{u_x}$$

que nos permite calcular a direção de $\mathbf{u}$ neste sistema em termos de suas componentes.

Componentes da soma de vetores

Uma maneira muito simples de encontrar a resultante de dois vetores é através da decomposição de vetores. Denotando por $\mathbf{w}$ a soma dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, a Figura 3.15 mostra claramente que

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_x + v_x)\,\mathbf{i} + (u_y + v_y)\,\mathbf{j}$$

Se w_x e w_y são as componentes do vetor $\mathbf{w}$ neste sistema, então podemos escrever:

$$\mathbf{w} = w_x\,\mathbf{i} + w_y\,\mathbf{j}$$

Comparando estas duas equações, encontra-se

$$w_x = u_x + v_x$$

$$w_y = u_y + v_y$$

ou seja, *as componentes da soma de dois vetores é a soma das componentes dos vetores*.

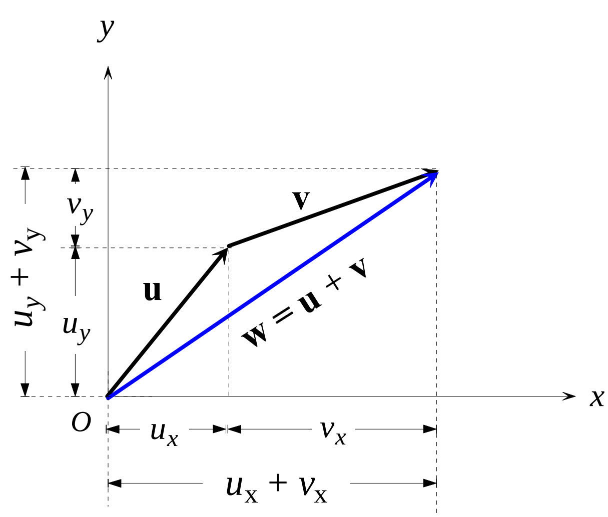


Figura 3.15 Componentes da soma de dois vetores

Módulo da soma de vetores Usando as propriedades da decomposição de um vetor, é fácil calcular o módulo da soma de dois vetores. Por exemplo, da definição de módulo em termos das componentes, encontra-se

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{(u_x + v_x)^2 + (u_y + v_y)^2}$$

Direção da soma de vetores Para determinar a direção da soma de dois vetores, basta usar a Eq. (3.3.5) do LT, aplicada ao vetor $\mathbf{w}$, isto é,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{w_y}{w_x} = \frac{u_y + v_y}{u_x + v_x}$$

Produto de vetores por escalares Quando relacionamos um vetor com um sistema de coordenadas o produto $\lambda\mathbf{u}$ em termos das componentes do vetor neste sistema torna-se

$$\lambda\mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda}(u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j}) = \lambda u_x\,\mathbf{i} + \lambda u_y\,\mathbf{j}$$

ou seja, quando multiplicamos um vetor $\mathbf{u}$, cujas componentes são (u_x, u_y), por um escalar λ, cada componente do vetor $\lambda\mathbf{u}$ fica multiplicada pelo mesmo fator λ: $(\lambda u_x, \lambda u_y)$.

Nem todo par ordenado define um vetor Num dado sistema de coordenadas, um vetor está associado a um par ordenado. Por exemplo, o vetor $\mathbf{u}$ está associado ao par ordenado (u_x, u_y) que são suas componentes neste sistema de coordenadas. Da mesma forma, $\mathbf{u}+\mathbf{v} \to (u_x+v_x, u_y+v_y)$, assim como $\lambda\mathbf{u} \to (\lambda u_x, \lambda u_y)$. Entretanto a recíproca **não** é verdadeira: nem todo par ordenado (u_x, u_y) define um vetor. É preciso também que se dêem os vetores unitários $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ que definem as direções dos eixos do sistema, que permita construir o vetor como entidade intrínseca, representável geometricamente de forma independente do sistema de coordenadas.

Seção 3.4 Velocidade e aceleração vetoriais

Nesta seção vamos aplicar os conceitos de vetores discutidos anteriormente para definir velocidade e aceleração. Considere uma partícula, em movimento num plano, que descreve uma trajetória APB em relação ao sistema de referência Oxy. Seja $\mathbf{r}(t)$ a posição da partícula no instante t, e $\mathbf{r}(t+\Delta t)$, no instante posterior $t+\Delta t$. O deslocamento da partícula entre os instantes t e $t+\Delta t$ é o vetor $\Delta\mathbf{r}$ mostrado na Figura 3.18, definido por

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

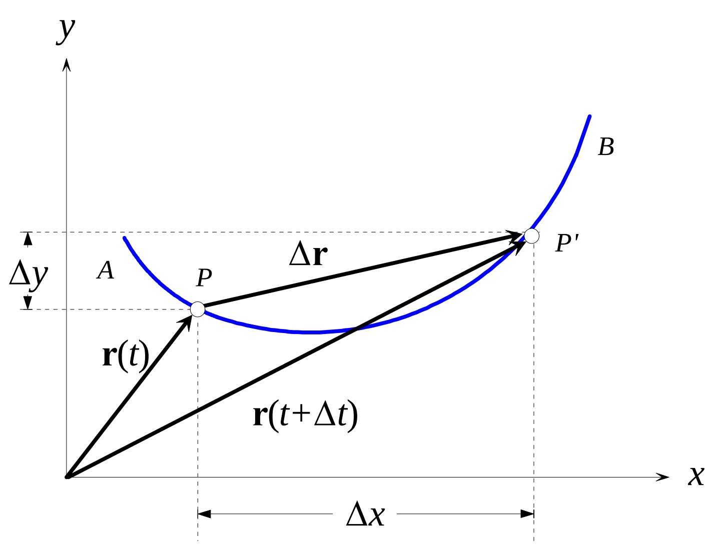


Figura 3.18 Trajetória plana.

Velocidades média e instantânea

Velocidade média Por analogia com a Eq. (2.15-LT), vamos definir a *velocidade média* entre os instantes t e $t+\Delta t$ por

$$\bar{\mathbf{v}}_{t\to t+\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

Observe que a velocidade média $\mathbf{v}_{t\to t+\Delta t}$ é um vetor, cuja direção e sentido são dados pelo vetor $\Delta\mathbf{r}$ (direção da corda PP' que liga as posições nos instantes t e $t+\Delta t$ sobre a trajetória).

Componentes da velocidade média Como o vetor deslocamento pode ser escrito como $\Delta\mathbf{r} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j}$, segue que as componentes da velocidade média são

$$\bar{v}_{x(t\to t+\Delta t)} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\bar{v}_{y(t\to t+\Delta t)} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

ou seja, são exatamente as velocidades médias dos movimentos unidimensionais descritos pelas projeções $x(t)$ e $y(t)$ sobre os eixos.

Componentes da velocidade instantânea De acordo com a discussão elaborada na Seção 2.2, quando $\Delta t \to 0$, sabemos que estas equações levam a

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t\to 0} v_{x(t\to t+\Delta t)} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y(t) = \lim_{\Delta t\to 0} v_{y(t\to t+\Delta t)} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = \frac{dy}{dt}$$

que representam as velocidades instantâneas dos movimentos unidimensionais descritos pelas projeções.

Velocidade instantânea Essas equações sugerem que podemos definir uma velocidade instantânea no instante t por

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = v_x(t)\,\mathbf{i} + v_y(t)\,\mathbf{j}$$

que serve, ao mesmo tempo, para introdir o conceito de derivada de um vetor dependente do parâmetro t em relação a este parâmetro.

Interpretação geométrica da velocidade instantânea Observando o comportamento do vetor $\Delta\mathbf{r}$ à medida que $\Delta t \to 0$ (Figura 3.19) vemos também que a direção da velocidade instantânea $\mathbf{v}(t)$ é a da tangente à trajetória no ponto $P,$ e o sentido é o sentido de percurso da trajetória para t crescente.

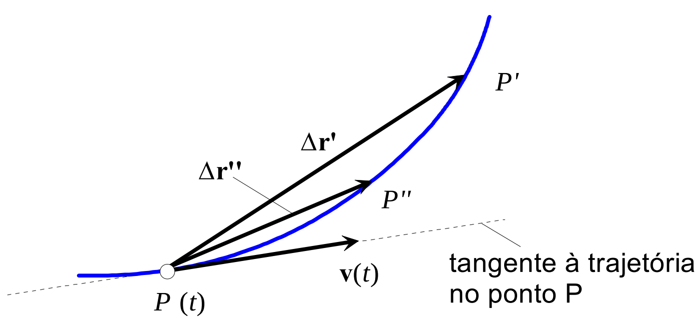


Figura 3.19 Velocidade vetorial.

Acelerações média e instantânea

Aceleração média Para definir a *aceleração média* de forma análoga, consideremos o intervalo $[t, t+\Delta t]$ e sejam $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ os vetores velocidades instantâneas nos extremos deste intervalo, que, como vimos, são tangentes à trajetória nos pontos correspondentes $P(t)$ e $P(t+\Delta t)$ (ver Figura 3.20).

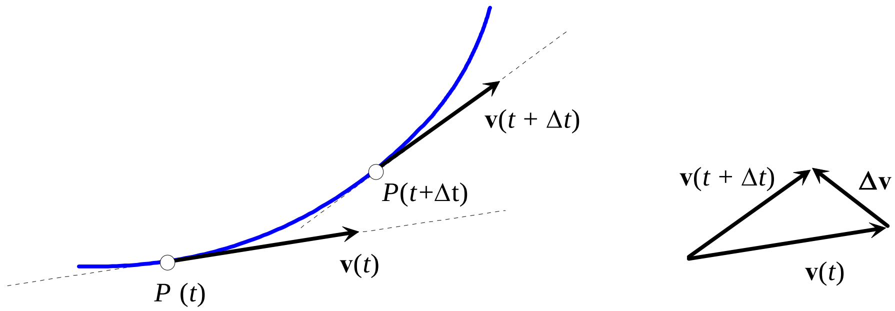


Figura 3.20 Aceleração vetorial.

Por definição,

$$\bar{\mathbf{a}}_{t\to t+\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

é o vetor aceleração média no intervalo $t \to t+\Delta t$.

Aceleração instantânea A aceleração instantânea no instante t é o vetor obtido de $\bar{\mathbf{a}}_{t\to t+\Delta t}$ no limite em que $\Delta t \to 0$, seja,

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \bar{\mathbf{a}}_{t\to t+\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

que é dado pela derivada do vetor velocidade instantânea em relação ao tempo. Como $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, podemos escrever

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}$$

que serve para introduzir a derivada segunda de um vetor.

Interpretação geométrica da aceleração instantânea Para isto, basta aplicar a interpretação geométrica da derivada de um vetor (no caso o vetor velocidade instantânea). Da mesma forma que a velocidade é tangente à trajetória, que é a curva descrita pelas extremidades do vetor posição (à esquerda na Figura 3.21), por construção, a aceleração também é tangente à curva descrita pelas extremidades do vetor velocidade (esta curva chama-se *hodógrafo*). Vemos que, em geral, $\mathbf{a}(t)$ não será tangente à trajetória (à direita na Figura 3.21).

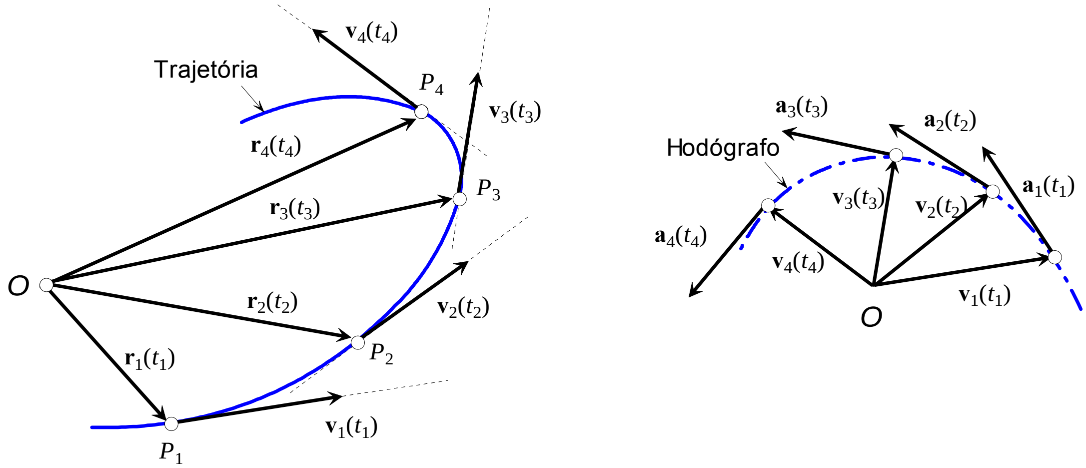


Figura 3.21 Trajetória e hodógrafo.

Cuidado *Uma conclusão que se pode tirar da discussão acima é que a aceleração* **não** *está associada apenas com a variação do módulo da velocidade: de acordo com a Figura 3.22, uma variação de direção da velocidade também representa uma aceleração. Assim, quando um carro percorre uma pista circular, ele tem aceleração, mesmo quando o ponteiro do velocímetro indica sempre o mesmo valor. Este resultado decorre do caráter vetorial da velocidade e da aceleração.*

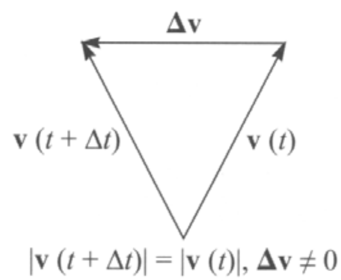


Figura 3.22 Variação da direção da velocidade.

Seção 3.5 Movimento uniformemente acelerado

Chama-se *movimento uniformemente acelerado* aquele em que a aceleração é constante (independente do tempo):

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a} = \text{constante}$$

Cuidado *Quando dizemos que um vetor é constante, significa que são constantes o módulo, a direção e o sentido desse vetor.*

Condições iniciais

Para determinarmos o movimento, precisamos fornecer ainda as *condições iniciais*, representadas pela posição e velocidade do objeto no início do movimento, ou seja,

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$$

onde $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{r}_0$, podem, em princípio, ser quaisquer vetores.

Conhecendo $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{r}(t)$ no instante $t = t_0$, podemos calcular esses vetores no instante $t = t_0 + \Delta t$, muito próximo de t_0 considerando que Δt seja suficientemente pequeno ($\Delta t \to 0$), de modo que seja permitido confundir velocidade média com velocidade instantânea e aceleração média com aceleração instantânea. Então, das definições de aceleração e velocidade médias, podemos escrever

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\,\Delta t$$

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}_0\,\Delta t$$

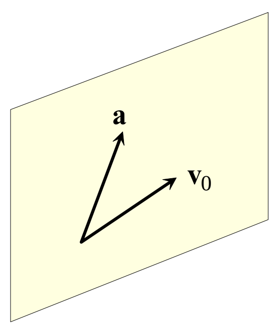
onde $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ e $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ são as variações da velocidade e da posição da partícula durante o pequeno intervalo de tempo Δt.

Análise do movimento

A expressão para $\Delta\mathbf{v}$ pode ser escrita na forma

$$\mathbf{v}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\,\Delta t$$

onde o segundo membro desta equação aparece a soma de dois vetores: $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{a}\Delta t$. Isto significa que a velocidade no instante $t_0 + \Delta t$ é obtida pela soma da velocidade $\mathbf{v}_0$, no instante t_0, com o vetor $\mathbf{a}\Delta t$ paralelo à aceleração $\mathbf{a}$. Como as direções dos vetores $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{a}$ definem um plano (ou melhor, uma família de planos paralelos), então a velocidade $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ está contida neste plano (figura abaixo).



Plano definido pela direção dos

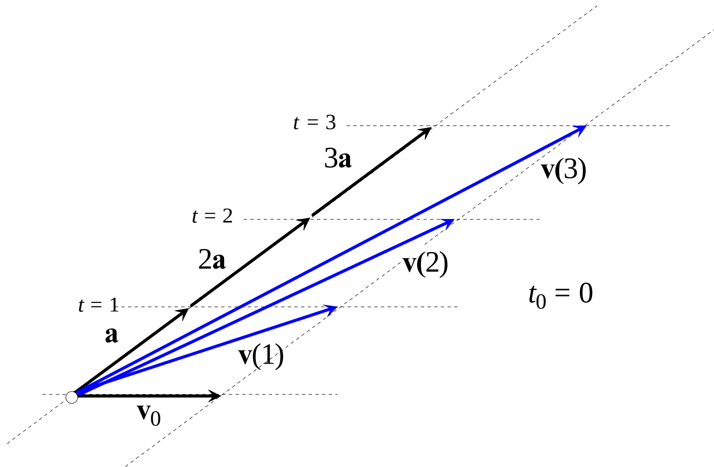
Repetindo o raciocício a partir de $t_0 + \Delta t$, podemos calcular a velocidade $\mathbf{v}(t_0 + 2\Delta t)$ a partir da já conhecida velocidade $\mathbf{v}(t_0 + \Delta t)$, ou seja,

$$\mathbf{v}(t_0 + 2\Delta t) - \mathbf{v}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{a}\,\mathbf{\Delta t}$$

ou

$$\mathbf{v}(t_0 + 2\Delta t) = \mathbf{v}(t_0 + \Delta t) + \mathbf{a}\,\mathbf{\Delta t}$$

Como $\mathbf{v}(t_0 + \Delta t)$ está contida no plano definido por $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{a}$, e como $\mathbf{a}$ é constante, concluímos que $\mathbf{v}(t_0 + 2\Delta t)$ também está contido neste mesmo plano. Este racionínio pode ser repetido indefinidamente, de onde podemos concluir que a velocidade $\mathbf{v}(t)$ em qualquer tempo finito t está contida no plano definido por $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{a}$ (figlura abaixo).

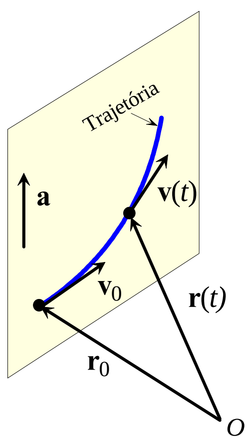


Variação do vetor velocidade **v** com o tempo.

Por outro lado, a equação para a variação da posição, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}_0\,\Delta t,$ que nos fornece o deslocamento da partícula sobre a trajetória, também se encontra no referido plano, uma vez que $\mathbf{v}_0$ é um vetor do plano. Além disso, $\mathbf{r}_0$ é um vetor arbitrário que indica a posição inicial da partícula e, por isto, pelo menos sua extremidade deve estar no plano que contém trajetória (este vetor é o que define em qual dos planos da família se dará o movimento). Como $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}_0,$ da equação

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \Delta t$$

conclui-se também que $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$ é um vetor, cuja extremidade também está no plano. Repetindo o raciocínio para $t_0 + 2\Delta t,\ t_0 + 3\Delta t, \ldots,$ conclui-se que, em qualquer instante $t,$ o vetor $\mathbf{r}(t)$ é um vetor cuja extremidade está no plano da trajetória (figura abaixo).



Trajetória no plano.

Resumo da análise Em resumo, podemos concluir que, no caso da aceleração $\mathbf{a}$ = constante, o resultado mais geral que podemos obter é um *movimento bidimensional*, isto é, aquele em que a trajetória da partícula está contida no plano definido por $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{a},$ que passa pela posição inicial $\mathbf{r}_0$.

Caso particular: $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{a}$ são paralelos No caso particular em que a velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ é paralela à aceleração $\mathbf{a}$, recaímos no movimento retilíneo uniformemente acelerado, já estudado na Seção 2.5, como pode ser facilmente deduzido da figura acima.

Descrição do movimento no plano através de um sistema de coordenadas

Vamos agora escolher um sistema de coordenadas cartesianas para descrever o movimento no plano. Como a aceleração é constante, vamos considerar o eixo Oy a direção segundo a direção de $\mathbf{a}$ (Figura 3.23). Observe que não seria necessário, mas tomamos a origem O no plano x-y.

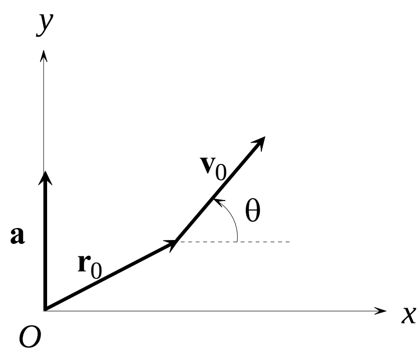


Figura 3.23 Condições iniciais.

Para este sistema de coordenadas, temos

$$\mathbf{a} = a\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\,\mathbf{i} + v_{0y}\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$$

Projeções do movimento As projeções do movimento sobre os eixos x e y obedecerão então

$$\left.\begin{array}{lll} a_x = 0, & v_x(t_0) = v_{ox}, & x(t_0) = x_0 \\ a_y = a = \text{ constante}, & v_y(t_0) = v_{oy}, & y(t_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

que correspondem a movimentos unidimensionais do tipo já considerado na Seção 2.5. Podemos então aplicar imediatamente os resultados daquela seção, lembrando que o movimento segundo a direção Ox é uniforme, e na direção Oy, é uniformemente acelerado. Assim, teremos

$$v_y(t) = v_{0y} + a(t - t_0)$$
$$v_x(t) = v_{0x}$$

e

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$
$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$$

Fazendo a composição vetorial,

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\,\mathbf{i} + v_y(t)\,\mathbf{j} = v_{0x}\mathbf{i} + [v_{0y} + a(t - t_0)]\,\mathbf{j} = \left(v_{0x}\,\mathbf{i} + v_{oy}\,\mathbf{j}\right) + \left(a\,\mathbf{j}\right)(t - t_0)$$

encontra-se

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0)$$

onde usamos as identidades $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\,\mathbf{i} + v_{oy}\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{a} = a\,\mathbf{j}$. Similarmente,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = [x_0 + v_{0x}(t - t_0)]\,\mathbf{i} + \left[y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2\right]\mathbf{j} \\ &= (x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}) + (v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j})(t - t_0) + \frac{1}{2}(a\mathbf{j})(t - t_0)^2\end{aligned}$$

de onde se obtém

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2$$

Caso particular: movimento retilíneo uniforme Para o caso particular em que $\mathbf{a} = 0$, recaímos no movimento retilíneo uniforme. De fato, como $\mathbf{a} = 0$, em qualquer instante o vetor velocidade é dado por $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$ o que define uma trajetória retilínea na direção do vetor velocidade constante. A Figura 3.24 ilustra este movimento.

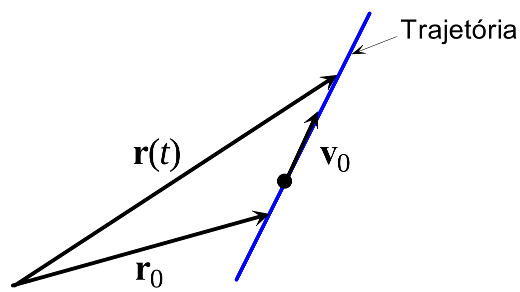


Figura 3.24 Movimento retilíneo uniforme.

As equações para este movimento podem ser obtidas daquelas do movimento uniformemente variado fazendo $\mathbf{a} = 0$. No caso das projeções, as Eqs. (3.5.7) do LT nos fornecem

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y &= y_0 + v_{0y}(t - t_0) \end{aligned}\right\}$$

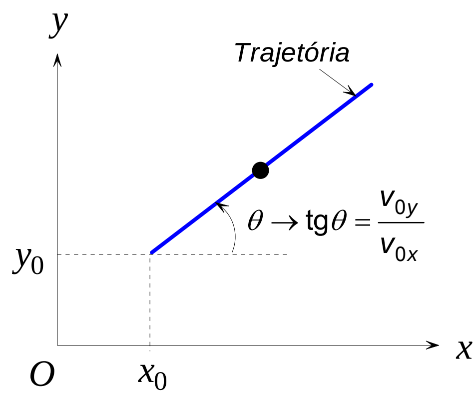
Eliminando o tempo nessas equações encontra-se

$$\frac{y - y_0}{v_{0y}} = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

que pode ser reescrita na forma

$$y = y_0 + \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)(x - x_0)$$

Observe que esta equação é a equação de um reta que passa por (x_0, y_0) e tem coeficiente angular $m = \operatorname{tg}\theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$, correspondente à trajetória da partícula (ver figura abaixo).



Detalhes da trajetória do movimento retilíneo uniforme.

Trajetória no caso geral

Para encontrar a trajetória no caso geral do movimento uniformemente acelerado, basta eliminar $t - t_0$ entre as equações (3.5.7) do LT, isto é,

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

desde que v_{0x} não seja nula. Mas, a condição de que $\mathbf{v}_0$ não é paralelo a $\mathbf{a}$ garante que

$$v_{0x} \neq 0$$

o que nos permite obter $(t - t_0)$ da primeira equação (3.5.7)

$$t - t_0 = \frac{x(t) - x_0}{v_{0x}}.$$

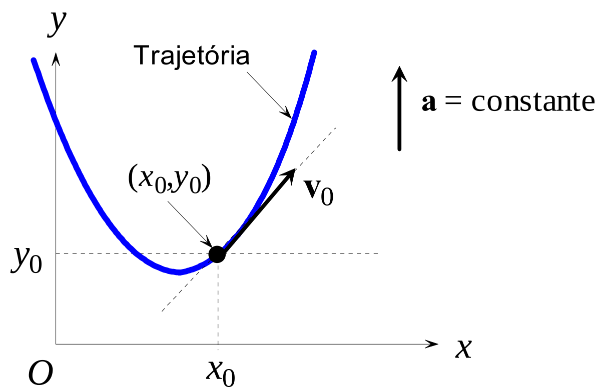
Substituindo este resultado na segunda equação

$$y(t) = y_0 + v_{0y}\left(\frac{x(t) - x_0}{v_{0x}}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{x(t) - x_0}{v_{0x}}\right)^2$$

encontra-se

$$y = y_0 + \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{a}{v_{0x}^2}(x - x_0)^2$$

que é a equação de uma *parábola* de eixo vertical, que passa por (x_0, y_0) e cuja tangente neste ponto tem a direção de $\mathbf{v}_0$ (por construção). Na figura abaixo, ilustramos os detalhes desta trajetória parabólica.



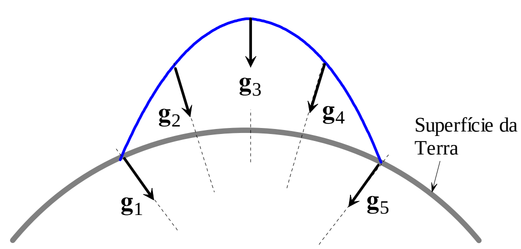
Detalhes da trajetória do movimento uniformemente acelerado.

Observação *Como resultado de nossa análise, concluímos que o movimento ao longo de uma parábola pode ser considerado como resultante da composição de um movimento retilíneo uniforme (na direção horizontal) com um movimento retilíneo uniformemente acelerado (na direção vertical).*

Seção 3.6 Movimento de projéteis

Uma aplicação muito importante dos resultados da seção anterior é o movimento de projéteis nas proximidades da superfície da Terra. Na balística usual (isto é, quando o alcance e a altitude atingidos pelo projétil são muito pequenos comparados com o raio da Terra) podemos desprezar a curvatura desta e considerá-la como uma superfície plana e a aceleração da gravidade como constante (não varia com a altitute).

No caso de projéteis de longo alcance, como foguetes balísticos intercontinentais, isto não seria verdade, uma vez que o vetor aceleração da gravidade, apontando sempre para o centro da Terra, estaria variando ao longo da trajetória do movimento (ver figura abaixo). Em consequência disto, a trajetória não teria a parabólica, mas sim de um arco de elipse, como mostra um estudo mais detalhado.



Vamos voltar ao caso em que a curvatura da Terra pode ser desprezada e considerar o movimento próximo à superfície da Terra. Pela convenção da seção anterior, vamos escolher o eixo Oy segundo a direção vertical, apontando para cima, de modo que na Eq. (3.54) do LT, $a = -g$ e então

$$\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j}$$

Vamos nos limitar ao caso em que $x_0 = y_0 = 0$, tomando a posição inicial como origem, e vamos tomar $t_0 = 0$. Seja o ângulo θ entre $\mathbf{v}_0$ e Ox (Figura 3.35), de modo que as projeções deste vetor sobre os eixos são dadas por:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta, \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta$$

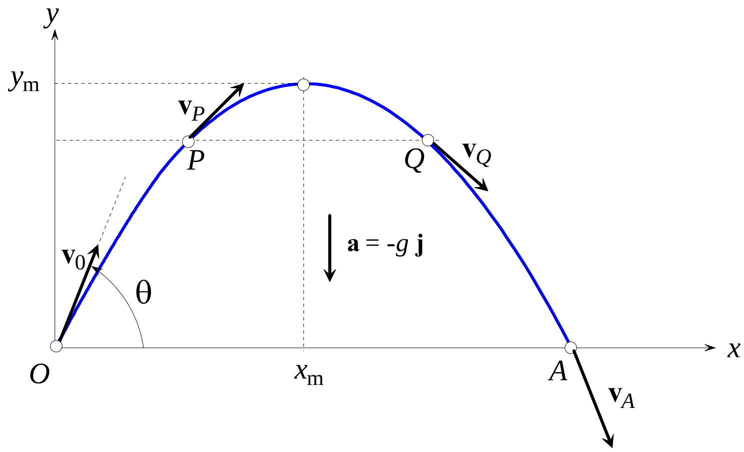


Figura 3.25 Movimento de projéteis: trajetória parabólica.

Assim, as equações (3.5.6) e (3.5.7) do LT, isto é,

$$\left.\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} \\ v_y(t) &= v_{oy} + a(t - t_0) \end{aligned}\right\} \text{Eq. (3.5.6-LT)}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y(t) &= y_0 + v_{oy}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \end{aligned}\right\} \text{Eq. (3.5.7-LT)}$$

tornam-se, para este movimento,

$$\left.\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos\theta \\ v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \end{aligned}\right\} \text{Eq. (3.6.3-LT)}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos\theta)\, t \\ y(t) &= (v_0 \operatorname{sen}\theta)\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \text{Eq. (3.6.4-LT)}$$

Equação da trajetória Para encontrarmos a equação da trajetória, $y = y(x)$, devemos eliminar o tempo entre as duas últimas equações. Assim, isolando t na equação para x,

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

e substituindo na equação para y, encontra-se,

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\theta)\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

ou,

$$y = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right) x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right) x^2$$

e, finalmente,

$$y = \operatorname{tg}\theta\, x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right) x^2$$

que é uma parábola de eixo vertical, com a concavidade voltada para baixo.

Altura máxima

Conforme mostra a Figura 3.25, a altura máxima y_m atingida pelo projétil, corresponde ao instante t_m em que v_y se anula

$$y = y_m \to v_y(t_m) = 0$$

Assim, pela Eq. (3.6.3-LT), encontra-se

$$v_y(t_m) = v_0 \operatorname{sen}\theta - g t_m = 0 \to t_m = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

e o valor correspondente de y é dado pela Eq. (3.6.4-LT)

$$y(t_m) = y_m = (v_0 \operatorname{sen}\theta)\, t_m - \frac{1}{2} g t_m^2$$

ou

$$y_m = (v_0 \operatorname{sen}\theta)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right)^2.$$

Simplificando esta equação, encontra-se

$$y_m = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g} - \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

ou ainda,

$$y_m = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

que é a altura máxima atingida pelo projétil em função dos valores iniciais v_0 e θ.

Tempo de vôo e velocidade ao atingir o solo

Tempo de vôo Podemos calcular o tempo que o projétil leva para atingir o solo no ponto $x = A$ (tempo de vôo). De acordo com a Figura 3.25, quando o projétil atinge o ponto $x = A$ sua ordenada se anula, $y = 0$. Ou seja,

$$y(t_A) = 0 \to x(t_A) = A$$

Assim,

$$y(t) = (v_0 \operatorname{sen}\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

o que nos leva a uma equação do segundo grau em t, de onde se obtém dois valores, um dos quais é o tempo t_A. De fato, colocando esta equação na forma

$$\left(t - \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right) t = 0$$

e, resolvendo para t, encontramos as duas raízes,

$$t = 0,$$

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Estas raízes correspondem às duas situações em que o projétil se encontra em $y = 0$ (no solo): uma no ponto O no instante de lançamento, e, portanto, $t = t_0 = 0$, e a outra, no instante t_A em que o projétil atinge o solo no ponto $x = A$, ou seja,

$$t = t_A = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} = 2t_m$$

Observação *O tempo t_A que o projétil leva para atingir o solo no ponto A, é o dobro do tempo t_m que ele leva para atingir a altura máxima y_m.*

Velocidade no ponto A Para calcular a velocidade com que o projétil atinge o solo no ponto A, basta substituir $t = t_A$ nas expressões para v_x e v_y. Ou seja,

$$\left.\begin{aligned} v_x(t_A) &= v_0 \cos\theta \\ v_y(t_A) &= v_0 \operatorname{sen}\theta - g t_A = v_0 \operatorname{sen}\theta - g\left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right) = -v_0 \operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} |\mathbf{v}(t_A)| = |\mathbf{v}_0|$$

Logo, ao atingir o solo, a velocidade do projétil só difere da velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ pela inversão da componente vertical $(v_y \to -v_y)$ e tem o mesmo módulo. Podemos mostrar que o mesmo se aplica para quaisquer dois pontos simétricos em relação a $x = x_m$, como por exemplo, P e Q, para os quais vale a igualdade dos módulos das velocidades: $|\mathbf{v}_P| = |\mathbf{v}_Q|$.

Velocidade em função da altura Usando a expressão (2.5.9-LT) para as componentes da velocidade do projétil, ou seja,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

(onde $v \to v_x$ ou v_y, $v_0 \to v_{0x}$ ou v_{0y}, $x \to x$ ou y e $x_0 \to x_0$ ou y_0) encontra-se

Para v_x: Lembrando que $a = 0$ na direção Ox, esta equação nos fornece

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

Para v_y: Lembrando que $y_0 = 0$, e que a aceleração vale a, temos

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2ay \to v_y = \pm\sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta - 2gy}$$

Reunindo os resultados para as duas componentes, temos

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = \pm\sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta - 2gy}$$

onde o sinal é $+$ ou $-$ conforme o projétil esteja subindo ou descendo, respectivamente.

Alcance do projétil

Chama-se *alcance do projétil* à distância entre o ponto de lançamento O e o ponto em que o projétil atinge o solo em $x = A$. Isto corresponde a calcular a distância horizontal percorridapelo projétil no tempo t_A. Assim, como já sabemos o tempo de vôo, t_A, basta substituí-lo na equação para $x(t)$, ou seja,

$$x(t_A) = A$$

resultando em

$$A = v_0 \cos\theta \left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \right) = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g}$$

onde usamos a bem conhecida relação trigonométrica: $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$. Uma consequência importante desta equação é que o alcance é máximo quando o "ângulo de elevação" θ vale $\theta = 45^\circ$. Neste caso,

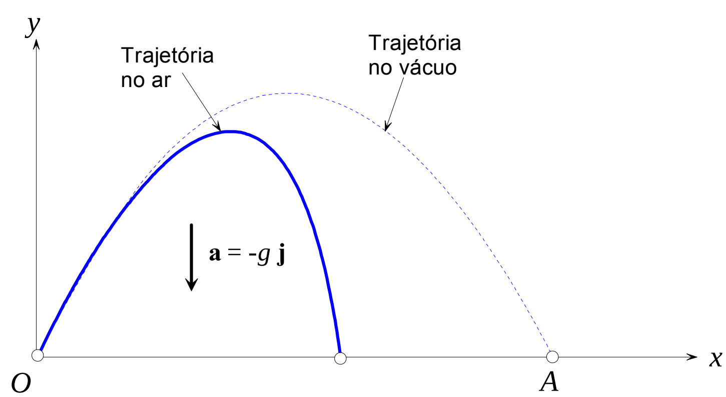
$$A_m = \frac{v_0^2}{g}.$$

uma vez que $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$. Em outras palavras, isto significa que, para um dado valor da velocidade inicial, o maior alcance deste projétil se obtém para $\theta = 45^\circ$.

Efeito da resistência do ar

Todos os resultados obtidos anteriormente foram considerados para o caso em que a velocidade inicial do projétil é suficientemente pequena para que se pudesse desprezar a resistência do ar. Este efeito é bastante complicado, porque a resistência do ar depende da forma do projétil e do módulo da velocidade instantânea, $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, de modo que este termo acopla os movimentos horizontal e vertical do projétil, os quais não podem mais ser considerados independentes.

Apenas para ilustrar o efeito da resistência do ar, a figura abaixo mostra qualitativamente como a trajetória do projétil deixa de ser parabólica, diminuindo o seu alcance.



Efeito da resistência do ar no movimento de projéteis.

★ **Leia o restante da seção**

Seção 3.7 Movimento circular uniforme

Nesta seção vamos estudar o movimento circular uniforme, que é um movimento cuja trajetória da partícula é uma circunferência e o *módulo* da velocidade instantânea é constante. Em consequência disto, a partícula descreve arcos de circunferência iguais em tempos iguais, e temos assim um movimento periódico, em que o período corresponde ao tempo gasto para realizar uma volta completa.

Seja r o raio da trajetória circular. A posição instantânea P da partícula fica definida pelo ângulo θ entre o vetor posição $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ correspondente e o eixo Ox de um sistema de coordenadas cartesianas com origem no centro do círculo, onde θ é positivo no sentido anti-horário (ver Figura 3.27). O arco s sobre a circunferência, correspondente ao ângulo θ, é dado por

$$s = r\theta$$

onde θ é medido em radianos (lembre-se: 2π rad $= 360°$).

Lei horária e velocidade instantânea

Vetores unitários nas direções de r e de θ Para prosseguir, vamos introduzir os vetores unitários $\hat{\mathbf{r}}$ na direção $\mathbf{r}$, que aponta radialmente para fora, e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ na direção tangente à circunferência (portanto perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}$) em P, orientado no sentido de θ crescente (anti-horário). Esses vetores são mostrados na Figura 3.27. Note que, ao contrário dos vetores unitários $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, que são vetores fixos na direção dos eixos Ox e Oy, as direções de $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ variam com a posição P ocupada pela partícula ao longo da circunferência.

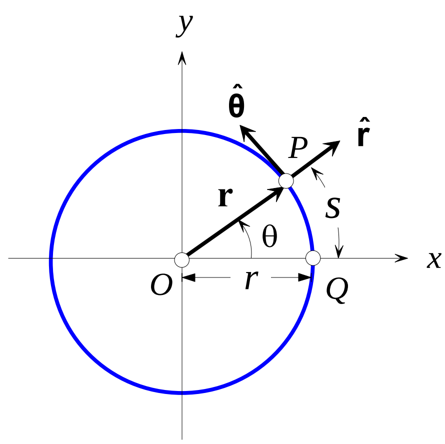


Figura 3.27 Movimento circular

Lei horária do movimento circular uniforme Por definição de movimento circular uniforme, a lei horária é dada por

$$s = s_0 + v(t - t_0)$$

onde s_0 é o valor do arco no instante t_0 e v é a “velocidade linear” com que o arco s é descrito. Esta velocidade pode ser positiva ou negativa, conforme o sentido seja anti-horário ou horário em que a circunferência é descrita, respectivamente.

Velocidade instantânea Podemos mostrar que o módulo da velocidade linear é igual ao módulo da velocidade instantânea da partícula, ou seja,

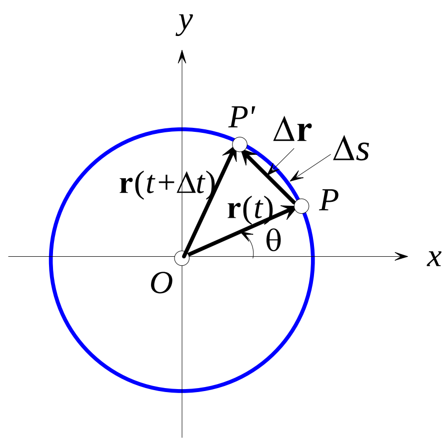
$$|v| = |\mathbf{v}(t)|$$

Para isto, vamos partir da definição de velocidade instantânea

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

onde $\Delta \mathbf{r}$ é o vetor deslocamento de P' em relação a P (figura abaixo). Mas quando $\Delta t \to 0$, $|\Delta \mathbf{r}| \to \Delta s$, ou seja, a corda $\overline{PP'}$ se confunde com o arco $\overset{\frown}{PP'}$, o que nos permite escrever

$$|\mathbf{v}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right|$$



Mas, em consequência da lei horária, podemos escrever

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

de onde se obtém o resultado desejado

$$|\mathbf{v}(t)| = |v|.$$

Este resultado, juntamente com os vetores unitários introduzidos na Figura 3.27, nos permitem reescrever a velocidade instantânea na forma,

$$\mathbf{v}(t) = v\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

que vale tanto para $v > 0$ (sentido anti-horário), como para $v < 0$ (sentido horário). Observe que a forma em que $\mathbf{v}(t)$ foi escrita, reforça a conclusão de que a velocidade instantânea é tangente à circunferência no ponto P (Figura 3.28) Por outro lado, o limite $\Delta s \to 0$ nos permite escrever a velocidade linear como

$$v = \frac{ds}{dt}$$

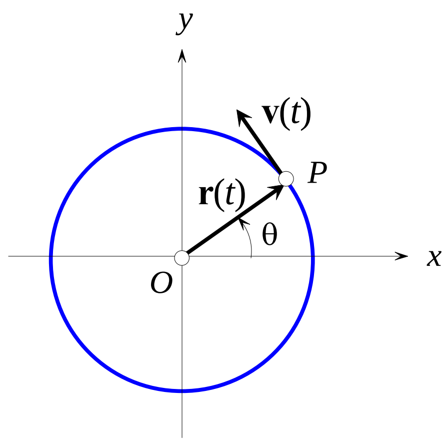


Figura 3.28 Velocidade instantânea.

Periodo, frequência e velocidade angular

Período (T) O *período* T do movimento circular uniforme é o tempo que uma partícula gasta para dar um volta completa na circunferência. Usando a equação horária, na forma

$$|\Delta s| = |v|\Delta t$$

então, quando $|\Delta s|$ for igual ao comprimento da circunferência, ou seja, $|\Delta s| = 2\pi r,\ \Delta t = T$ é o período. Logo

$$T = \frac{2\pi r}{|v|}$$

Frequência (ν) Define-se a frequência ν (letra grega *ni*) como o inverso do período. Assim,

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Velocidade angular Partindo da lei horária $s = s_0 + v(t - t_0)$ e da relação entre arco e ângulo numa circunferência, $s = r\theta,$ ou $\theta = \frac{s}{r},$ podemos dividir a equação horária pelo raio r da circunferência, ou seja,

$$\frac{s}{r} = \frac{s_0}{r} + \frac{v}{r}(t - t_0)$$

para obter a equação horária angular,

$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

onde introduzimos a *velocidade angular,* $\omega,$ definida por

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Da lei horária angular, onde $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ e $\Delta t = t - t_0,$ obtém-se

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Relação entre período, frequência e velocidade angular Da definição de período $T,$

$$T = \frac{2\pi r}{|v|}$$

e de velocidade angular $\omega = \frac{v}{r}$ ou $v = \omega r,$ podemos escrever

$$T = \frac{2\pi r}{|\omega r|} = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

de modo que

$$|\omega| = \frac{2\pi}{T}$$

Por outro lado,

$$T = \frac{1}{\nu} \rightarrow \nu = \frac{1}{T}$$

o que, juntamente com a penúltima equação, nos leva a

$$|\omega| = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Unidades de medida de velocidade angular A velocidade angular ω tem a dimensão de ângulo dividido pelo tempo. Então, velocidade angular se mede em radianos/segundo (rad/s ou rad·s^{-1}) ou simplesmente s^{-1}.

Relação entre velocidade instantânea e velocidade angular Vimos que a velocidade instantâne $\mathbf{v}$ pode ser escrita como

$$\mathbf{v} = v\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

onde v é a velocidade linear. Mas, como $v = \omega r$, podemos reescrever a expressão para a velocidade instantânea na forma

$$\mathbf{v} = \omega r\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Aceleração centrípeta

O movimento circular uniforme tem aceleração Embora o movimento circular uniforme tenha uma velocidade de *módulo* constante, a direção de $\mathbf{v}$ varia de ponto para ponto da trajetória. Como a velocidade varia, então o movimento circular uniforme é um movimento que tem *aceleração*.

Cálculo da aceleração Podemos obter a aceleração $\mathbf{a}$ do movimento circular uniforme pelo processo geométrico do hodógrafo (lembre-se que o hodógrafo é a "trajetória" descrita pelas extremidades do vetor velocidade). Como o módulo da velocidade é constante, então a trajetória descrita pela extremidade desse vetor é também uma circunferência de raio igual ao módulo da velocidade linear, isto é, $|v|$. Na Figura 3.29, mostramos a trajetória (linha cheia) e o hodógrafo (linha interrompida) do movimento.

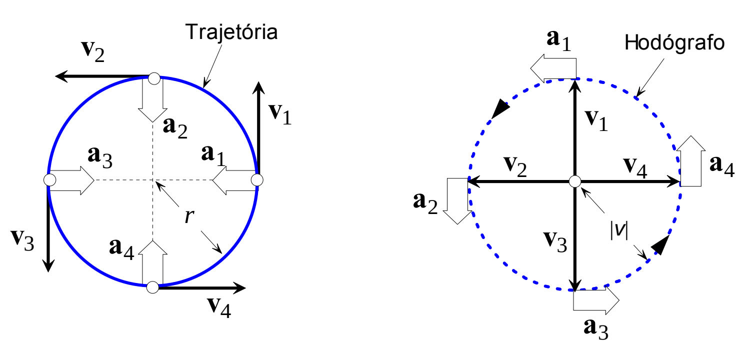


Figura 3.29 Trajetória e hodógrafo do movimento circular

Pelo que já vimos na Seção 3.4, a velocidade com que a trajetória é descrita é dada pelo vetor $\mathbf{v}$ tangente à trajetória em cada ponto; de forma análoga a "velocidade" com que a curva hodográfica é descrita também é dada pelo vetor tangente em cada ponto, só que neste caso este vetor é a aceleração $\mathbf{a}$ (Figura 3.29).

Observe que a aceleração $\mathbf{a}$ pode ser interpretada como a "velocidade de variação da velocidade" no hodógrafo, da mesma forma que $\mathbf{v}$ é a velocidade de variação da posição da partícula sobre a trajetória. Desta maneira, é fácil concluir que a velocidade angular com que o hodógrafo é descrito é a mesma com que a trajetória é percorrida. A diferença fica por conta do raio das duas curvas: a trajetória circular tem raio $r,$ enquanto que o raio do hodógrafo é $|v|$. Assim, podemos aplicar a Eq. (3.7.8-LT), $v = \omega r,$ que no hodógrafo torna-se $|\mathbf{a}| = \omega v,$ para obter

$$|\mathbf{a}| = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Por outro lado, da Figura 3.29, vemos que o vetor aceleração $\mathbf{a},$ que é tangente ao hodódrafo, está dirigido radialmente para dentro da trajetória circular, e, portanto, na direção oposta a do vetor unitário $\hat{\mathbf{r}}.$ Logo, a partir da definição de vetor unitário, podemos escrever

$$\mathbf{a} = -|\mathbf{a}|\,\hat{\mathbf{r}} = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

Esta aceleração é chamada *aceleração centrípeta*, porque ela aponta para o centro da trajetória circular.

Outra forma de obter a aceleração centrípeta

Uma outra maneira de obter os resultados acima, é empregar diretamente a definição (3.4.7-LT) do vetor aceleração, isto é,

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

onde $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t).$ Para isso, considere a Figura 3.30. Em (a), mostram-se os vetores $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ onde Δt corresponde a um incremento $\Delta\theta.$ Em (b), ilustra-se a construção de $\Delta\mathbf{v},$ mostrando que, no limite em que $\Delta t \to 0,$ $\Delta\mathbf{v}$ tende a apontar na direção $-\hat{\mathbf{r}}.$ Na mesma figura (b), vê-se que $\Delta\theta$ é o ângulo entre $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ de maneira que no limite $\Delta t \to 0,$ o comprimento de $\Delta\mathbf{v}$ (corda) se confunde com o comprimento do arco de circunferência de raio $|v|$, que subentende o ângulo $|\Delta\theta|.$ Assim, de acordo com a figura (b), podemos escrever

$$|\Delta\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|\,|\Delta\theta| \to \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t} = |\mathbf{v}|\frac{|\Delta\theta|}{\Delta t}$$

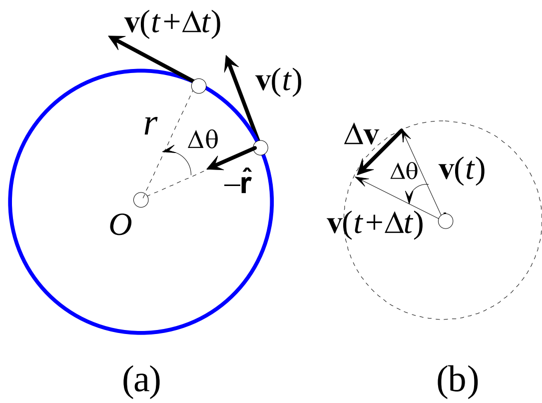


Figura 3.30 Incremento de velocidade.

Tomando o limite na última expressão, encontra-se

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = |\mathbf{v}|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\theta|}{\Delta t}$$

ou

$$|\mathbf{a}| = |\omega|\,|v|$$

Mas, se $v > 0 \to \omega > 0$ (sentido anti-horário) e se $v < 0 \to \omega < 0$ (sentido horário), de maneira que $\omega v > 0$ (sempre). Então podemos escrever a expressão para o módulo da aceleração como

$$|\mathbf{a}| = \omega\, v$$

que concorda com a Eq. (3.7.12-LT).

★ Reproduza o exemplo em que se calcula a aceleração centrípeta da Lua.

Seção 3.8 Acelerações tangencial e normal

Movimento circular acelerado

Diz-se do movimento circular em que o módulo da velocidade (além, é claro, da sua direção), também varia com o tempo. Observe que agora existem dois fatores que contribuem para a variação $\Delta\mathbf{v}$ da velocidade, correspondentes a: (1) variação do módulo e (2) variação da direção. Vamos considerar separadamente esses dois fatores.

Na Figura 3.31(a) consideramos a situação em que $|\mathbf{v}(t+\Delta t)| \neq |\mathbf{v}(t)|$. Na (b), $\mathbf{PQ}$ representa $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{PP}'$ corresponde a $\mathbf{v}(t+\Delta t)$. O ponto $\mathbf{Q}'$ é tomado de tal forma que $|\mathbf{PQ}'| = |\mathbf{PQ}| = |\mathbf{v}(t)|$. Desta figura, vemos que

$$\Delta\mathbf{v} \equiv \mathbf{QP}' = \mathbf{QQ}' + \mathbf{Q}'\mathbf{P}'$$

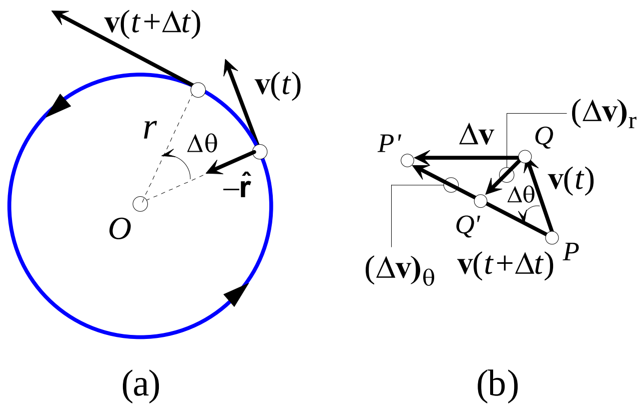


Figura 3.31 Movimento circular acelerado.

Aceleração radial

Mas, $\mathbf{QQ}'$ já foi calculado em (3.7.14-LT):

$$\left|\mathbf{QQ}'\right| = |(\Delta\mathbf{v})_r| \approx |\mathbf{v}|\,|\Delta\theta|$$

onde o índice r se refere ao fato de que, para $\Delta t \to 0$, $(\Delta\mathbf{v})_r$ dará a componente radial de $\mathbf{a}$ (aceleração centrípeta), já calculada na Seção 3.7. Então

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(\Delta\mathbf{v})_r}{\Delta t}\right] = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{\mathbf{r}}$$

Aceleração angular

A componente nova que temos que calcular é $\mathbf{Q}'\mathbf{P}'$. No caso ilustrado na Figura 3.31(a), temos $v > 0$ (sentido anti-horário) e a (b) mostra que, no limite em que $\Delta t \to 0$ $(\Delta\theta \to 0)$ a direção e o sentido de $\mathbf{Q}'\mathbf{P}'$ tendem a coincidir com os de $\mathbf{v}(t)$, ou seja [cf. (3.7.3-LT)], com os do vetor unitário $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, e

$$\mathbf{Q}'\mathbf{P}' = (\Delta\mathbf{v})_\theta = [\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)]\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \Delta v\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

de modo que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{(\Delta\mathbf{v})_\theta}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta v\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Como $v = \omega r$ e $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$, podemos escrever

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2} = r\alpha$$

onde α se chama *aceleração angular* e é definida como

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Combinando as expressões acima, obtemos finalmente a expressão da aceleração num movimento circular qualquer:

$$\mathbf{a} = a_r\,\hat{\mathbf{r}} + a_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

onde

$$a_r = -\omega^2 r = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{v^2}{r}$$

e

$$a_\theta = \alpha r = r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

Observação Nestas expressões, o termo $a_r\hat{\mathbf{r}}$ continua sendo chamado de *aceleração centrípeta*; o outro termo $a_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é a componente da aceleração tangente ao à circunferência e se chama, por isso, *aceleração tangencial.*

Movimento circular uniformemente acelerado

Vamos aplicar o formalismo desenvolvido nesta seção a um caso especial de movimento circular acelerado em que o módulo da aceleração tangencial, a_θ, é constante. Mas, devido à relação $a_\theta = \alpha r$, entre a aceleração tangencial e a aceleração angular, podemos também expressar essa condição (da constância do módulo da aceleração tangencial) como $\alpha r =$ constante, ou simplesmente,

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \text{constante}$$

uma vez que o raio, r, do círculo é constante.

Condições iniciais Vamos considerar que a partícula, no instante inicial t_0, esteja na posição (angular) θ_0 e que sua velocidade angular seja ω_0. Então

$$\omega_0 = \omega(t_0) = \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=t_0}$$
$$\theta_0 = \theta(t_0)$$

A partir da equação $\alpha =$ constante, podemos usar o processo do problema inverso para encontrar a lei horária $\theta = \theta(t)$, analogamente ao que foi feito para o movimento retilíneo, bastando substituir formalmente $x \to \theta$, $v \to \omega$ e $a \to \alpha$, Assim, para estes valores iniciais, encontra-se

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

Eliminando $t - t_0$ entre essas duas equações, temos uma equação alternativa que não envolve o tempo, dada por

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Aceleração do movimento

A aceleração, $\mathbf{a}$, do movimento é obtida de sua definição em termos das componentes

$$\mathbf{a} = a_r\,\hat{\mathbf{r}} + a_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

onde

$$a_r = -\omega^2 r, \qquad a_\theta = \alpha r$$

Substituindo nestas expressões os valores de ω e α encontrados acima, ficamos com

$$a_r = -\left[\omega_0 + \alpha(t - t_0)\right]^2 r$$

que fornece a_r em função do tempo, ou usando a outra expressão para ω,

$$a_r = -[\omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)]\, r$$

que também depende do tempo, mas através da posição angular θ da partícula. A outra componente da aceleração não depende do tempo.

Movimento plano sobre uma trajetória qualquer

Até agora consideramos o movimento plano sob certas condições especiais, que resultaram em trajetórias retilíneas, parabólicas ou circulares. Nesta seção, vamos tratar o movimento plano sem nenhuma dessas restrições de maneira que a trajetória do movimento pode ser qualquer curva plana AB (Figura 3.32).

Para início, sejam os pontos P e P' as posições do objeto nos intantes t e $t+\Delta t$ respectamente. Para Δt (ou $\Delta\theta$) suficientemente pequeno, o arco PP' sobre a curva AB pode ser confundido com o arco de circunferência de raio R, cujo círculo está centrado no ponto C. Nestas condições, o ponto C chama-se *centro de curvatura* (instantâneo) da curva no ponto P, e R é o *raio de curvatura* correspondente. Como se pode observar diretamente na figura, em geral, C e R variam de ponto a ponto da curva.

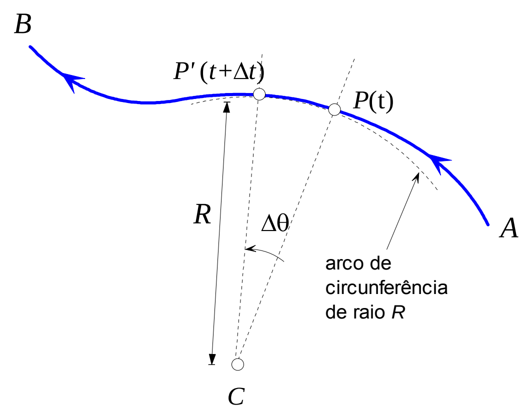


Figura 3.32 Movimento plano geral.

Agora sabemos que, para $\Delta t \to 0$, um arco da curva pode substituído por um arco de circunferência, e, por isto, neste limite o movimento sobre a curva pode ser considerado como um movimento circular de raio R. Assim, instantaneamente os dois movimentos (curva e circunferência) têm a mesma aceleração $\mathbf{a}$. Para o movimento sobre a circunferência, a expressão de **a** já é conhecida, sendo dada por

$$\mathbf{a} = a_r\, \hat{\mathbf{r}} + a_\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

onde os vetores unitários $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ foram definidos com base no movimento circular. Esta mesma expressão vale para aquele pequeno arco da curva considerado.

Mas o que significa os vetores $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ para uma trajetória qualquer? Quando se trata de uma trajetória representada por uma curva qualquer, devemos interpretar $\hat{\mathbf{r}}$ **e** $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sob o ponto de vista da trajetória, em termos dos seus centros instantâneos de curvaturas. Assim, a aceleração $a_\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ tem a direção da tangente à trajetória no ponto P e dá a aceleração tangencial $\mathbf{a}_T$ mostrada na Figura 3.33. Por outro lado, o vetor $a_r\hat{\mathbf{r}}$ aponta em direção ao centro de curvatura C no ponto P e dá a aceleração normal $\mathbf{a}_N$ (mesma figura).

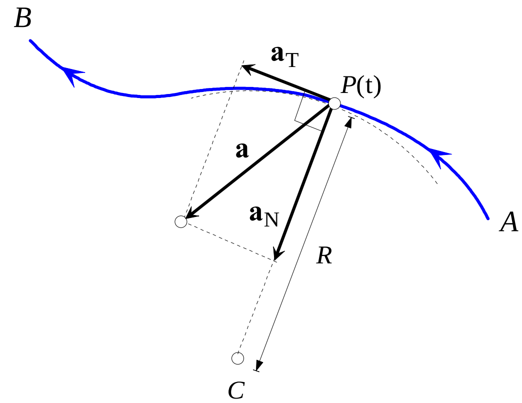


Figura 3.33 Acelerações normal e

A aceleração resultando no ponto P no instante t é dada pela composição desses dois vetores, ou seja,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N$$

e, de acordo com as Eqs. (3.8.9-LT) e (3.8.9-LT), os módulos de $\mathbf{a}_T$ e $\mathbf{a}_N$ são dados por

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

onde R é o raio de curvatura em P. O módulo da aceleração em P é dada por

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}\,.$$

Seção 3.9 Velocidade relativa

Considere duas partículas em movimento em relação a um observador localizado em O. Num dado instante t, as partículas se encontram nos pontos P_1 e P_2 correspondentes às posições $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ em relação a O (Figura 3.34). A posição relativa de P_2 em relação a P_1, no instante t, é dada pelo vetor $\mathbf{r}_{12}(t)$, que pode ser expresso como a diferença dos vetores $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_1$. Ou seja,

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

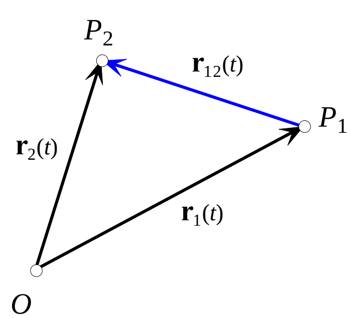


Figura 3.34 Deslocamento

Como sabemos, as velocidades $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ das partículas em relação a O são dadas por

$$\mathbf{v}_1(t) = \frac{d\mathbf{r}_1(t)}{dt}$$

$$\mathbf{v}_2(t) = \frac{d\mathbf{r}_2(t)}{dt}$$

Então, derivando a posição relativa da partícula 2 em relação à particula 1, $\mathbf{r}_{12}$, em relação ao tempo, encontramos

$$\frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

Definindo a velocidade relativa da partícula 2 em relação à partícula 1 como $\mathbf{v}_{12} = \frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt}$, podemos escrever essa equação acima na forma

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

ou seja, a velocidade relativa da partícula 2 em relação à partícula 1 é a diferença entre as velocidades de 2 e 1 em relação ao observador O. Podemos interpretar a velocidade relativa $\mathbf{v}_{12}$ como a velocidade da partícula 2 medida por um observador localizado na partícula 1, de modo análogo como $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são as velocidades medidas por um observador em O.

★ Leia o restante da seção e faça os exercícios do final do capítulo para treinar o assunto.