Capítulo 2

# MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL

Livro-Texto: *Curso de Física Básica-Mecânica*, H. Moysés Nussenzveig (4ª. Edição,2003)

---

*Atenção Estas notas têm por finalidade auxiliá-lo no estudo dos assuntos tratados no livro-texto (Física Básica-Mecânica de H. Moysés Nussenzveig) e não devem ser usadas com o intuito de substituí-lo. A leitura do livro-texto é imprescindível!*

## ■ Objetivos gerais

*Aqui você tem informações sobre os objetivos gerais do capítulo*

Neste capítulo, vamos iniciar o estudo do movimento, mas sem considerar (ainda) o problema de como determiná-lo numa dada situação física. Com este tipo de abordagem, nosso objetivo é introduzir os conceitos fundamentais que intervém na descrição do movimento, para só depois considerarmos o assunto sob o ponto de vista das leis da dinâmica. A *cinemática*, como é conhecido este tipo de análise, não é necessariamente a única forma de se começar o estudo do movimento, embora seja, certamente, a maneira mais simples e didática de começar esse assunto.

Este capítulo é fundamental para o estudo dos movimentos, uma vez que trata de introduzir e conceituar as grandezas básicas que intervêm na sua formulação. Embora se considere aqui um caso particular do movimento, isto é, o movimento sobre uma linha reta (movimento *unidimensional*), os conceitos de grandezas físicas tais como **deslocamento**, **velocidade** e **aceleração** podem ser facilmente generalizados para os casos mais complexos (movimentos *bi*- e *tridimensional*) que serão estudados no próximo capítulo.

## ■ Assunto: Movimento Unidimensional

*Aqui você fica sabendo quais os assuntos que serão tratatados nas aulas sobre este capítulo.*

**Seção 2.1** Velocidade média

**Seção 2.2** Velocidade instantânea

**Seção 2.3** O problema inverso

**Seção 2.4** Aceleração

**Seção 2.5** Movimento retilíneo uniformemente acelerado

**Seção 2.6** Galileu e a queda dos *corpos*

## ■ Objetivos específicos

*Ler apenas não basta: certifique-se sempre de que você está aprendendo. Resolva uma quantidade razoável de problemas do capítulo.*

Ao término deste capítulo, verifique se você é capaz de:

- descrever um movimento em termos de um referencial.
- conceituar velocidade média e velocidade instantânea, sabendo distinguir uma da outra.
- representar e interpretar graficamente velcidade média e velocidade instantânea.
- calcular a velocidade instantânea como um processo limite da velocidade média.
- conceituar aceleração média e aceleração instantânea, sabendo distinguir uma da outra.

- representar e interpretar graficamente aceleração média e aceleração instantânea.
- calcular a aceleração instantânea como um processo limite da aceleração média.
- representar graficamente um movimento, sabendo distinguir entre trajetória e gráfico do movimento.

## ■ Guia de estudo

*Nesta seção, discutimos alguns assuntos apresentados no livro-texto, visando uma abordagem, sempre que possível, complementar*

Ninguém está errado ao dizer que tudo no Universo está em movimento. Ou em repouso. Você vai aprender que **repouso** e **movimento** são conceitos **relativos**, ou seja, dependem da escolha (arbitrária) de um referencial para descrevê-los. Por exemplo, uma árvore ou uma casa, que está sempre no mesmo lugar quando você passa por ela todos os dias, está em repouso em relação à Terra; porém, se considerarmos o Sol como referência, ela estará em movimento em relação a ele. Da mesma forma, quando estamos parados num terminal e observamos um ônibus que passa dizemos que o ônibus está em movimento em relação ao terminal. Mas um passageiro naquele ônibus pode também afirmar que o terminal está em movimento em relação ao ônibus. Neste exemplo, vemos claramente que o movimento é uma questão de "ponto de vista" do observador. Não existe o que chamamos de movimento absoluto ou repouso absoluto; o que existe é **movimento relativo** ou **repouso relativo**, que são conceitos que demandam a necessidade de um **referencial** para descrevê-los. Até que se diga o contrário, o sistema de referência que adotaremos é a Terra.

### *Seção 2.1 Velocidade média*

**Como estudar o movimento?** Do ponto de vista da cinemática, estudar o movimento nada mais é do que determinar as posições do móvel, em relação a um dado referencial, como função do tempo. No caso do movimento retilíneo, o referencial é simplesmente uma reta orientada, onde se escolhe uma origem $O$. Na figura abaixo, o referencial é representado pelo eixo dos $x$ e as posições do móvel são dadas pelas abcissas correspondentes $x(t)$. No caso de um automóvel, por exemplo, $x(t)$ é a posição na estrada ocupada pelo para-choque dianteiro em cada instante $t$.

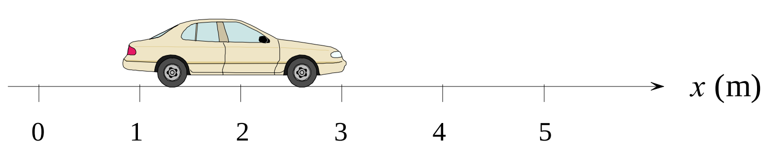



**Fig. 2.1** Movimento unidimensional

Experimentalmente, determinam-se essas posições, usando-se métodos de “congelamento” de imagens através de filmadores, fotografias de exposição múltiplas etc de modo que as posições do objeto possam ser determinadas para cada instante de tempo conhecido.

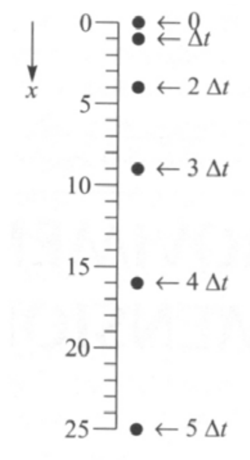



**Fig 2.2** Bolinha em queda livre: fotografia de múltipla exposição

De posse dessas medidas, podemos construir uma “tabela horária” do movimento do tipo

| *t* (s) | 0 | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *x* (m) | 0 | 0,8 | 3,1 | 1,5 | $\cdots$ |

ou um gráfico do tipo

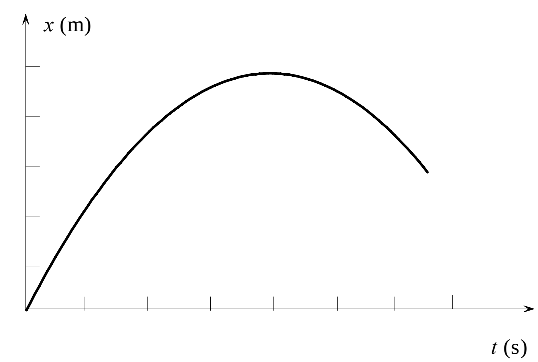



**Fig. 2.3** Gráfico de um movimento

## *Movimento uniforme*

O gráfico mais simples que podemos obter da observação de um corpo em movimento é uma reta, dada por uma equação do tipo

$$x(t) = a + bt$$

e que representa o *movimento uniforme.* A visualização gráfica desta reta é mostrada na figura abaixo.

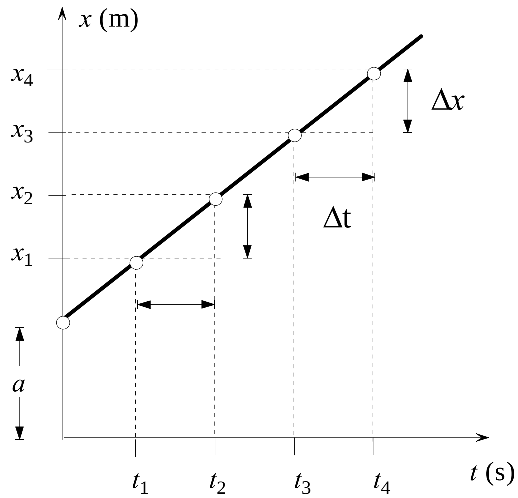



**Fig. 2.4** Gráfico de um movimento retilíneo uniforme

A característica fundamental do movimento retilíneo uniforme é que os percursos iguais $\Delta x = x_4 - x_3 = x_2 - x_1$ são descritos em intervalos de tempos iguais $\Delta t = t_4 - t_3 = t_2 - t_1$, onde introduzimos a notação $x_4 \equiv x(t_4)$, …, ou seja, $x_i \equiv x(t_i)$. Em consequência disto, a razão entre os deslocamentos pelos correspondentes intervalos de tempo decorridos para produzi-los é sempre constante, isto é,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_4 - x_3}{t_4 - t_3} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

e, graficamente, representa o coeficiente angular da reta (definido como a tangente do ângulo de inclinação em relação ao eixo $t$) no gráfico $x$ versus $t$. Na equação da reta $x(t) = a + bt$, o coeficiente angular é dado por $b$.

**Definição de velocidade** A velocidade $v$ do movimento é definida por

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

De acordo com o que já vimos, esta razão define também o coeficiente angular da reta que representa graficamente o movimento uniforme, o que nos permite identificar a velocidade do móvel com o parâmetro geométrico relacionado com a inclinação da reta em relação ao eixo $t$. Ou seja, $v = b$ para a equação da reta.

**A velocidade pode ser positiva ou negativa** A razão $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, que define a velocidade, pode ter valores positivos ou negativos, dependendo do sinal do deslocamento $\Delta x$, quando $\Delta t$ é positivo. Assim,

$$\begin{cases} v > 0, & \text{se } \Delta x > 0 \\ v < 0, & \text{se } \Delta x < 0 \end{cases}$$

O sinal da velocidade está relacionado com o sentido do movimento em relação ao referencial considerado, que, no caso do movimento retilíneo, é simplesmente o eixo das coordenadas $x$. Assim, para $v > 0$ o movimento se dá no mesmo sentido desta reta orientada, enquanto que, para $v < 0$, o sentido do movimento é contrário a essa orientação.

**Rapidez** Como vimos, a velocidade pode tomar valores positivos ou negativos, sendo que o sinal relacionado com o sentido do movimento. Assim, podemos dizer que a grandeza velocidade, da forma como foi definida para o movimento retilíneo, contém informações acerca tanto da rapidez, quanto do sentido do movimento realizado. Às vezes estamos interessados apenas no módulo da velocidade, que fornece a informação sobre quão rápido o movimento é descrito. Neste caso, podemos introduzir uma grandeza chamada “rapidez”, definida como o valor absoluto da velocidade, ou seja, $|v|$.

**Lei horária** Partindo da definição de velocidade,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

podemos reescrever

$$x(t_2) - x(t_1) = v(t_2 - t_1)$$

ou

$$x(t_2) = x(t_1) + v(t_2 - t_1)$$

Agora vamos identificar $t_2$ como um instante qualquer, que chamaremos de $t$, e $t_1$, com o instante inicial, $t_0$. Ou seja,

$$t_2 \equiv t, \quad t_1 \equiv t_0$$

Com isto, a “lei horária” do movimento torna-se

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

onde

$$x_0 = x(t_0).$$

**Unidades de medida da velocidade** De acordo com a definição, velocidade tem dimensão $LT^{-1}$. Então, conforme as unidades adotadas para medir comprimento e tempo, a velocidade pode ser medida em **m/s**, ou **cm/s** ou **km/h** … No SI, a unidade de velocidade é m/s.

Ao medirmos a velocidade usando várias unidades, devemos saber como fazer a conversão entre elas. A regra é simples, uma vez que essas transformações dependem das correspondentes conversões das unidades de comprimento e de tempo isoladamente, ou seja, $1\text{m} = 100$ cm $= 10^{-3}$km e 1s $= \frac{1}{3.600}$h etc. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 1\text{m/s} &= 100 \text{ cm/s} \\ 1\text{m/s} &= 10^{-3} \text{ km/(1h/3.600)} \\ &= 3,6 \text{ km/h} \end{aligned}$$

## *Movimento não-uniforme*

Quando o movimento não é uniforme dizemos que é “acelerado”. É claro que neste caso o gráfico do movimento não é mais uma reta, uma vez que a velocidade não é mais constante ao longo do movimento. Podemos, no entanto, estender para este caso o conceito de velocidade dado anteriormente, definindo a *velocidade média*, $\bar{v}_{t_1 \to t_2}$, entre os instantes $t_1$ e $t_2$. Ou seja,

$$\bar{v}_{t_1 \to t_2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

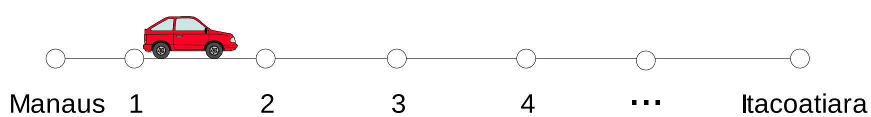
Portanto, a velocidade média entre os instantes $t_1$ e $t_2$ corresponde à velocidade de um movimento uniforme que, partindo de $x(t_1)$ em $t_1$, chegasse a $x(t_2)$ em $t_2$. Em geral, a velocidade média depende do intervalo de tempo em relação ao qual ela é definida. Assim, por exemplo, a velocidade média $v_{t_3 \to t_4} = \frac{x(t_4) - x(t_3)}{t_4 - t_3}$ é diferente da velocidade média $\bar{v}_{t_1 \to t_2}$ no intervalo entre $t_1$ e $t_2$. Um caso particular é quando se trata do movimento uniforme, onde, por definição, a velocidade média é igual para todos os intervalos de tempo em que o movimento é considerado.

**Informação contida na velocidade média** Vimos que, no movimento uniforme, a velocidade é constante ao longo todo o percurso e, em qualquer intervalo de tempo, se confunde com a velocidade média. Porém, quando se trata de movimento não uniforme a velocidade média é apenas uma aproximação do movimento geral por um movimento uniforme no intervalo considerado. Como exemplo, considere o caso de um carro que percorresse a estrada Manaus-Itacoatiara (suposta retilínea) em seis horas. Para um percurso de $240$km isto implicaria numa velocidade média entre os instantes de partida e chegada de $240$km/$6$h $= 40$ km/h.


Velocidade média num trecho longo

Mas, podemos ver que a informação contida neste número sobre como o movimento se desenvolveu é muito pouca. Em outras palavras, dados importantes sobre a evolução do movimento não são revelados quando se conhece a velocidade média num trecho muito longo. No caso da viagem Manaus-Itacoatiara o carro poderia ter parado algumas horas em algum local intermediário ou ter desenvolvido velocidades médias bem maiores em algumas etapas do percurso, mas nenhumas destas informações pode ser obtida da velocidade média no trecho total.

Uma maneira mais informativa de descrever o movimento do carro, seria obter os valores da velocidade média em diferentes trechos do percurso. Assim, quanto menor o trecho considerado, melhor seria a descrição do movimento através das velocidades médias nesses trechos, uma vez que estaremos aproximando pequenos trechos por movimentos uniformes, cujo erro vai diminuindo dimimui à medida que encurtamos esses trechos.




Velocidade média em diferentes trechos do percurso

### *Interpretação geométrica da velocidade média*

O gráfico de um movimento não uniforme pode ser qualquer curva como por exemplo a mostrada na figura abaixo. De acordo com a definição, a velocidade média representa geometricamente o coeficiente angular ($= \operatorname{tg}\theta$), da corda que liga os extremos $1$ e $2$ do arco de curva no gráfico $x \times t$.

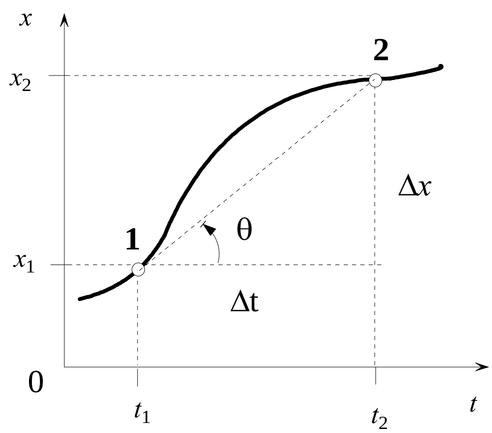



**Fig. 2.5** Interpertração geométrica da velocidade média

## *Seção 2.2 Velocidade instantênea*

**O que significa velocidade num instante $t$?** Quando definimos velocidade no movimento uniforme ou velocidade média no movimento não uniforme o fizemos através da razão entre o deslocamento $\Delta x = x_2 - x_1$ pelo intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ necessário para produzi-lo. Observe que nesta definição tanto o deslocamento, como o intervalo de tempo são medidas da diferença entre dois valores ("*posição ou instante final* menos *posição ou instante inicial*"). A questão que se coloca agora é: *como definir velocidade num único instante $t$*?

**O que é um instante de tempo?** Antes de respondermos a essa pergunta, vamos analisar o que entendemos por *instante de tempo $t$.* Para isto, considere um dado evento, por exemplo o acionamento de um flash de uma máquina fotográfica, que ocorre entre os instantes $t_1$ e $t_2$. Como sabemos da prática, esses instantes estão muito próximos um do outro, uma vez que a duração $\Delta t (= t_2 - t_1)$ deste evento (o brilho) é muito rápido. Usando este exemplo, podemos definir um *evento instantâneo* como algo que ocorre num intervalo de tempo extremamente curto. Então, como a medida da velocidade média é um evento que ocorre entre os instantes $t_1$ e $t_2$, deve também ser possível definir a velocidade instantânea como um caso limite da velocidade média quando o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ considerado for extremamente curto.

Para expressar matematicamente esta condição de intervalo extremamente curto na ocorrência de um evento, vamos escrevê-la na forma $\Delta t \to 0$ ("$\Delta t$ tende a zero"), o que acontece quando $t_2 \to t_1$, ou seja, quando o instante final $t_2$ se aproxima indefinidamente do instante inicial $t_1$. Desta maneira, podemos definir o instante $t_1$ (ou $t_2$) como um caso limite do intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ entre dois instantes $t_1$ e $t_2$, quando $\Delta t \to 0$.

**Velocidade instantânea como caso limite da velocidade média** Considerando o instante como um intervalo de tempo $\Delta t$ extremamente curto, podemos definir velocidade média neste intervalo e encontrar seu valor como o caso limite quando $\Delta t \to 0$.

Considere por exemplo que queremos calcular a velocidade instantânea para $t_1 = t$. Então tudo que precisamos fazer é calcular uma sequência de valores da velocidade média entre os instantes $t$ e $t + \Delta t$, tomando-se valores para $\Delta t$ sucessivamente menores até o limite $\Delta t \to 0$. De forma análoga, poderíamos partir para o cálculo da sequência de velocidades médias entre os instantes $t - \Delta t$ e $t$. No limite $\Delta t \to 0$, essas duas sequências devem convergir para o valor da velocidade instantânea no instante $t$. Para aplicar estas idéias, vamos considerar o seguinte exemplo:

**Exemplo 1** *Considere a experiência de queda livre da bolinha representada na Fig. 2.2. O gráfico do movimento tem a forma de uma parábola,* $x = \alpha t^2$*, onde para x em metros e t em segundos* $\alpha$ *seria* $\approx$ *5m/s*$^2$*. Assim, vamos considerar,*

$$x(t) = 5t^2$$

*Qual a velocidade instantânea para* $t = 1$ *s?*

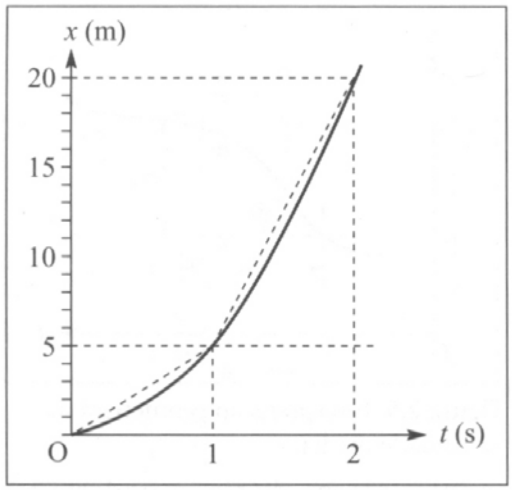



**Fig. 2.6** Velocidade média na queda livre

De acordo com a nossa interpretação de instante de tempo, vamos escolher sucessivamente $\Delta t = 1$s, $0,1$s, $0,01$s ... Em seguida, calcula-se as sequências de velocidades médias nos intervalos $(t - \Delta t, t)$ e $(t, t + \Delta t)$ para cada um dos valores sucessivamente menores de $\Delta t$. Assim,

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_{0\to1} &= \frac{x(1)-x(0)}{\Delta t} = \frac{5-0}{1} = 5\text{m/s} \\ \bar{v}_{1\to2} &= \frac{x(2)-x(1)}{\Delta t} = \frac{20-5}{1} = 15\text{m/s} \end{aligned}\right\} \Delta t = 1\ \text{s}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_{0,9\to1} &= \frac{x(1)-x(0,9)}{\Delta t} = \frac{5,00-4,05}{0,1} = 9,5\text{m/s} \\ \bar{v}_{1\to1,1} &= \frac{x(1,1)-x(1)}{\Delta t} = \frac{6,05-5}{0,1} = 10,5\text{m/s} \end{aligned}\right\} \Delta t = 0,1\ \text{s}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_{0,99\to1} &= \frac{x(1)-x(0,99)}{\Delta t} = \frac{5,000-4,9005}{0,01} = 9,95\text{m/s} \\ \bar{v}_{1\to1,01} &= \frac{x(1,01)-x(1)}{\Delta t} = \frac{5,1005-5,0000}{0,01} = 10,05\text{m/s} \end{aligned}\right\} \Delta t = 0,01\ \text{s}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_{0,999\to1} &= \frac{x(1)-x(0,999)}{\Delta t} = \frac{5,000000-4,990005}{0,001} = 9.995\text{m/s} \\ \bar{v}_{1\to1,01} &= \frac{x(1,01)-x(1)}{\Delta t} = \frac{5,010005-5,000000}{0,001} = 10,005\ \text{m/s} \end{aligned}\right\} \Delta t = 0,001\ \text{s}$$

Podemos observar que esta sequência de valores para a velocidade média tende para um valor limite que, para $\Delta t = 0.001$s está entre $9,995$ m/s e $10,005$ m/s. De fato, continuando este processo de encurtar cada vez mais o intervalo $\Delta t$, podemos mostrar que $\bar{v}_{t-\Delta t\to t}$ e $\bar{v}_{t\to t+\Delta t}$ (para $t = 1$ s) tendem para o mesmo valor, $v = 10$ m/s, que é a velocidade instantânea para $t = 1$. Note que, quando $\Delta t \to 0$, também $\Delta x \to 0$, mas o quociente $\Delta x/\Delta t$ tende para um valor finito $v = 10$ m/s no exemplo acima.

### *Derivada de uma função*

Felizmente não precisamos calcular aquela sequência de valores de velocidades médias para determinar a velocidade instantânea, por exemplo, no instante $t = t_0$. Para indicar a velocidade instantânea como um caso limite da velocidade média, vamos usar a seguinte notação

$$v(t = t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{t_0 \to t_0 + \Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[ \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right]_{t = t_0}$$

onde "$\lim\limits_{\Delta t \to 0}$" lê-se "limite de ... para $\Delta t \to 0$" e significa que podemos nos aproximar tanto quanto quisermos do resultado exato, tomando $\Delta t$ suficientemente pequeno. Este limite chama-se derivada da função $x(t)$ em relação a $t$ no ponto $t_0$ e é representado simbolicamente por

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right]_{t = t_0} = \left[ \frac{dx}{dt} \right]_{t = t_0}$$

onde $dx$ e $dt$ são notações. Assim, a velocidade instantânea no ponto $t_0$ é definida como a derivada da posição em relação ao tempo naquele ponto, ou seja,

$$v(t = t_0) = \left[ \frac{dx}{dt} \right]_{t = t_0}$$

Esse limite acima nem sempre existe para qualquer função de $t$; quando existe, a função chama-se *diferenciável* no ponto $t_0$.

**Exemplo 2** *Calcular a derivada de*

$$x(t) = at^2 + bt + c$$

*onde $a$, $b$ e $c$ são constantes, num ponto qualquer $t$.*

*Solução:* *De acordo com a definição, precisamos do limite*

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right]$$

Como

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= a(t + \Delta t)^2 + b(t + \Delta t) + c \\ &= at^2 + 2at\Delta t + a(\Delta t)^2 + bt + b\Delta t + c \\ &= x(t) + 2at\Delta t + a(\Delta t)^2 + b\Delta t \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{x(t) + 2at\Delta t + a(\Delta t)^2 + b\Delta t - x(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{2at\Delta t + a(\Delta t)^2 + b\Delta t}{\Delta t} \\ &= 2at + a\Delta t + b \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\Delta t \to 0}(2at + a\Delta t + b) = 2at + b$$

ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = 2at + b$$

O exemplo da queda livre é um caso especial desta equação, onde $b = c = 0,\ a = 5$ e $t = 1.$ Assim,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \times 5 \times 1 + 0 = 10$$

como havíamos encontrado.

Na tabela abaixo, encontram-se as derivadas mais usuais.

Tabela de derivadas

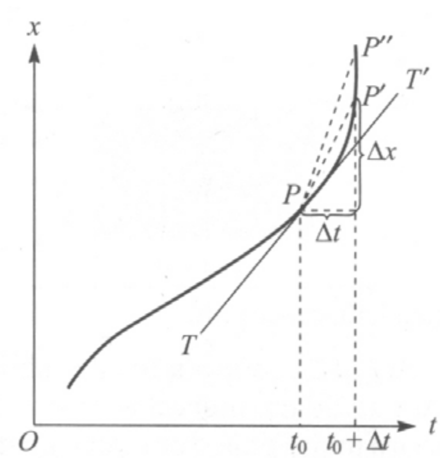
| Função | Derivada |
|---|---|
| $x = c$ | $\frac{dx}{dt} = 0$ |
| $x = t^n$ | $\frac{dx}{dt} = nx^{n-1}$ |
| $x = au$ | $\frac{dx}{dt} = a\frac{du}{dt}$ |
| $x = u + v + w$ | $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dt}$ |

### *Interpretação geométrica da velocidade instantânea*

A velocidade instantânea $v(t)$ num instante $t$ qualquer para um movimento descrito por $x = x(t)$ é dada por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{t \to t+\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Como no caso da velocidade média, a velocidade instantânea também tem uma intrerpretação geométrica simples no gráfico $x \times t$.




No caso da velocidade média, interpretamos geometricamente como o coeficiente angular da corda que liga os extremos do intervalo em que ela é definida. Lembrando que a velocidade instantânea é obtida como um caso limite da velocidade média quando o intervalo $\Delta t \to 0,$ podemos associá-la com o coeficiente angular da reta tangente $TT'$ no ponto $t_0$. Note que esta é também a interpretação geométrica da derivada $dx/dt$; ela mede a “taxa de variação” de $x$

com $t$.

A interpretação geométrica da derivada num ponto $t$ qualquer, como sendo o coeficiente angular da reta tangente à curva $x \times t$ naquele ponto, mostra imediatamente (Fig. 2.8) que:

$$\frac{dx}{dt}\begin{cases} > 0, & \text{num ponto onde } x \text{ está crescendo com } t \\ = 0, & \text{num ponto onde a curva tem tangente horizontal} \\ < 0 & \text{num ponto onde } x \text{ está decrescendo com } t \end{cases}$$

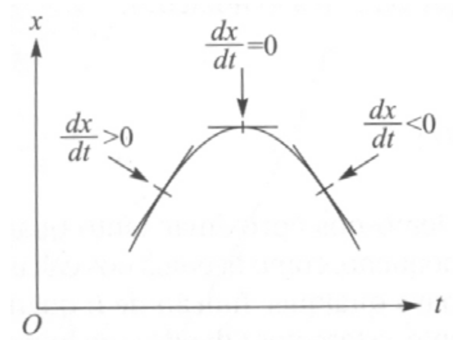



**Fig. 2.8** Sinal da derivada

## *Seção 2.3 O problema inverso*

Na seção anterior, vimos como foi possível encontrar a velocidade instantânea $v(t)$ ao longo do movimento, conhecendo-se a lei horária $x = x(t)$: basta tomar $dx/dt$.

Agora queremos resolver o problema inverso: conhecendo a velocidade instantânea $v(t)$ entre um dado instante inicial $t_1$ e um instante final $t_2$, calcular o espaço percorrido entre esses dois instantes, ou seja, $\Delta x_{t_1 \to t_2} = x(t_2) - x(t_1)$.

### *Movimento uniforme*

Quando o movimento é uniforme a velocidade instantânea e a velocidade média se confundem, $v = \bar{v} =$ constante e o gráfico $v \times t$ é uma reta paralela ao eixo dos $t$ (Fig. 2.9).

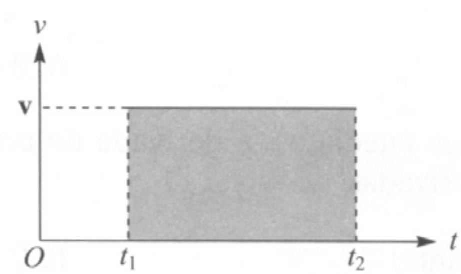



**Fig. 2.9** Espaço percorrido como área

Pela definição de velocidade média, o espaço percorrido entre $t_1$ e $t_2$ é:

$$\Delta x_{t_1 \to t_2} = x(t_2) - x(t_1) = \bar{v}_{t_1 \to t_2}(t_2 - t_1) = \bar{v}(t_2 - t_1) = v(t_2 - t_1)$$

De acordo com a Fig. 2.9, o espaço percorrido tem uma interpretação simples: é a área da porção do gráfico $v \times t$

situada entre o gráfico e o eixo das abcissas e limitadas pelas ordenadas em $t_1$ e $t_2$.

Como a velocidade pode ser positiva ou negativa, a “área” deve ser também definida como positiva ou negativa, conforme seja $v > 0$ ou $v < 0$. Assim, uma área situada abaixo do eixo $Ot$ tem de ser tomada como negativa, o que significa simplesmente $x(t_2) < x(t_1)$, ou seja, movimento para trás.

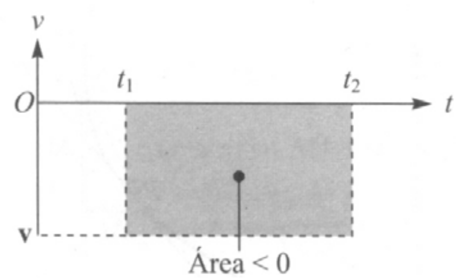



**Fig. 2.10** Área negativa

### *Movimento não-uniforme*

Como $v(t)$ é uma função que varia no intervalo $[t_1, t_2]$ não podemos aplicar diretamente o resultado anterior. Para isto, vamos dividir este intervalo em um grande número de pequenos subintervalos, de larguras $\Delta t_1,\ \Delta t_2,\ \Delta t_3 \dots,$ por pontos de subdivisão $t'_1,\ t'_2,\ t'_3 \dots,$ (veja Fig. 2.11) onde $t'_1 = t_{\prime} + \Delta t_1,\ \Delta t'_2 = t'_1 + \Delta t_2,\ \dots$

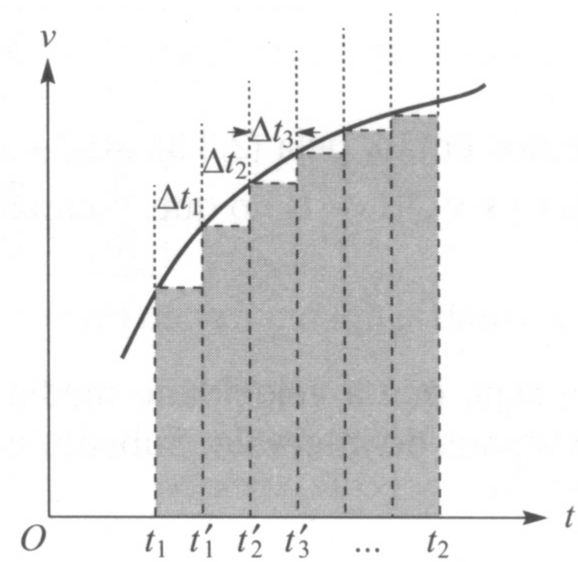



**Fig. 2.11** Divisão em subintervalos

Se os intervalos $\Delta t_i\ (i = 1, 2, 3 \dots)$ forem suficientemente pequenos, a velocidade variará muito pouco em cada um desses intervalos e agora podemos calcular a distância percorrida em cada um aproximando a velocidade média pela velocidade num de seus pontos, por exemplo, o extremo esquerdo de cada intervalo:

$$\begin{aligned}
\Delta x_{t_1 \to t_1'} &= x(t_1') - x(t_1) = \bar{v}_{t_1 \to t_1'} \Delta t_1 \approx v(t_1)\Delta t_1 \\
\Delta x_{t_1' \to t_2'} &= x(t_2') - x(t_1') = \bar{v}_{t_1' \to t_2'} \Delta t_2 \approx v(t_1')\Delta t_2 \\
\Delta x_{t_2' \to t_3'} &= x(t_3') - x(t_2') = \bar{v}_{t_2' \to t_3'} \Delta t_3 \approx v(t_2')\Delta t_2
\end{aligned}$$

Somando membro a membro estas três relações, obtemos o deslocamento total entre $t_1$ e $t_3'$:

$$x(t_3') - x(t_1) \approx v(t_1)\Delta t_1 + v(t_1')\Delta t_2 + v(t_2')\Delta t_2$$

Se prosseguirmos até $t_2$ obteremos a soma das contribuições de todos os subintervalos em que $[t_1, t_2]$ foi dividido:

$$x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_i v(t_i')\Delta t_i$$

Graficamente, cada termo da soma corresponde à área de um retângulo e a soma é a área compreendida entre o eixo $Ot$ e uma linha poligonal “em escada” inscrita na curva $v \times t$ entre $t_1$ e $t_2$.

O valor da soma se aproxima tanto mais do resultado exato quanto menores forem as subdivisões $\Delta t_i$. Logo, no limite em que os $\Delta t_i$ tendem a zero, devemos obter:

$$x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v(t_i')\Delta t_i = \begin{array}{l}\text{Área entre a curva } v \times t \\ \text{e o eixo } Ot \text{ de } t_1 \text{ a } t_2\end{array}$$

### *Definição de integral definida*

O limite na equação anterior é chamado de integral definida de $v(t)$ entre os extremos $t_1$ e $t_2$, é representado pela notação

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v(t_i')\Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

**Exemplo 3** Vamos considerar o caso em que $v(t)$ é dado por

$$v(t) = 2at + b$$

como no Exemplo 2. O gráfico desta função é uma reta como mostrada na Fig. 2.12. A área que temos que calcular aqui é a área do trapézio sombreado. De acordo com a equação, encontra-se

$$\begin{cases} v_1 = v(t_1) = 2at_1 + b \\ v_2 = v(t_2) = 2at_2 + b \end{cases}$$

Pela definição de espaço percorrido, temos

$$\begin{aligned}
x(t_2) - x(t_1) &= \text{Área do trapézio} = \text{Semi-soma das bases} \times \text{Altura} \\
&= \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

Comparando com a definição de velocidade média, isto é,

$$x(t_2) - x(t_1) = \bar{v}_{t_1 \to t_2}(t_2 - t_1)$$

encontra-se que, para este movimento, a velocidade média é dada por

$$\bar{v}_{t_1 \to t_2} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

ou seja, a velocidade média num intervalo é a média aritmética das velocidades nos extremos do intervalo. Substituindo os valores de $v_1$ e $v_2$, encontramos

$$\begin{aligned}\bar{v}_{t_1\to t_2} &= \frac{1}{2}(2at_1 + b + 2at_2 + b)\\ &= \frac{1}{2}(2at_1 + 2at_2 + 2b)\\ &= a(t_1 + t_2) + b\end{aligned}$$

Logo, o espaço percorrido será

$$\begin{aligned}x(t_2) - x(t_1) &= \bar{v}_{t_1\to t_2}(t_2 - t_1)\\ &= [a(t_1 + t_2) + b](t_2 - t_1)\\ &= a(t_2^2 - t_1^2) + b(t_2 - t_1)\end{aligned}$$

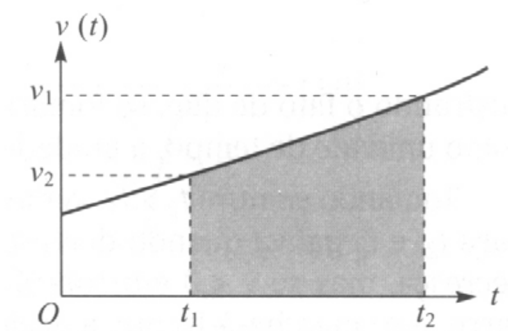



**Fig. 2.12** Exemplo de integração

Esta equação pode ser aplicada em particular tomando para $t_1$ o instante inicial $t_1 = 0$ e para $t_2$ um instante genérico $t$. Chamando $x(0) = c$ (o valor inicial de $x$), então

$$\begin{aligned}x(t) - x(0) &= a(t^2 - 0^2) + b(t - 0)\\ &= at^2 + bt\end{aligned}$$

Ou seja,

$$x(t) = at^2 + bt + c$$

Logo, este processo de "integração" nos permitiu recuperar a lei horária do Exemplo 2 a partir da expressão da velocidade e do valor inicial de $x$.

## *Seção 2.4 Aceleração*

### *Aceleração média*

Por analogia com a definição de velocidade média, vamos definir primeiro a aceleração média no intervalo $[t_1, t_2]$ por

$$\bar{a}_{t_1\to t_2} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A aceleração média pode ser positiva ou negativa, ou seja,

$$\bar{a}_{t_1\to t_2}\begin{cases} > 0 & \text{se } v \text{ cresce de } t_1 \text{ a } t_2\\ < 0 & \text{se } v \text{ decresce de } t_1 \text{ a } t_2\end{cases}$$

**Unidades de aceleração** Por definição, a aceleração tem dimensão $LT^{-2}$ e pode ser expressa em m/s$^2$, km/h$^2$, cm/s$^2$ conforme as unidades usadas para medir comprimento e tempo. No SI, a unidade de aceleração é m/s$^2$.

### *Aceleração instantânea*

Aqui valem as mesmas considerações que levaram a definir velocidade instantânea. Assim,

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt}$$

ou seja, a aceleração instantânea é a derivada em relação ao tempo da velocidade instantânea. Substituindo $v = \frac{dx}{dt}$ encontra-se

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

onde introduzimos a definição de derivada segunda de $x$ em relação a $t$, indicada pela notação $d^2x/dt^2$.

### *Interpretação geométrica da aceleração instantânea*

A mesma interpretação geométrica da derivada se aplica aqui: num gráfico $v \times t$, $a(t)$ é o coeficiente angular da tangente à curva no ponto correspondente ao instante $t$.

**Exemplo 4** Movimento de um automóvel

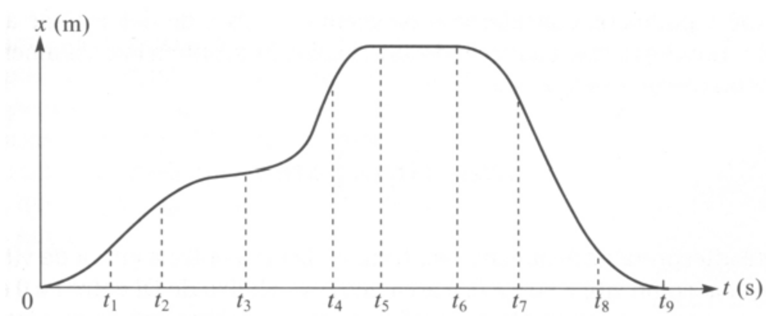



**Fig. 2.13** Posição em função do tempo

Com auxílio da interpretação geométrica da derivada como coeficiente angular da tangente à curva, pode-se esboçar pelo menos qualitativamente o gráfico da velocidade instantânea associada a esse movimento.

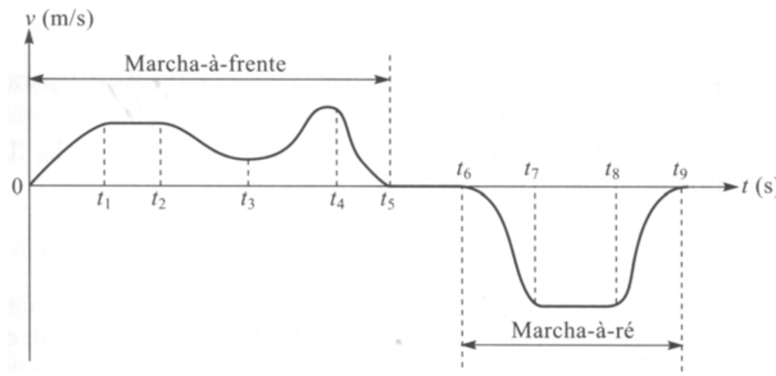



**Fig. 2.14** Velocidade em função do tempo

O gráfico da aceleração instantânea se obtém de forma análago.

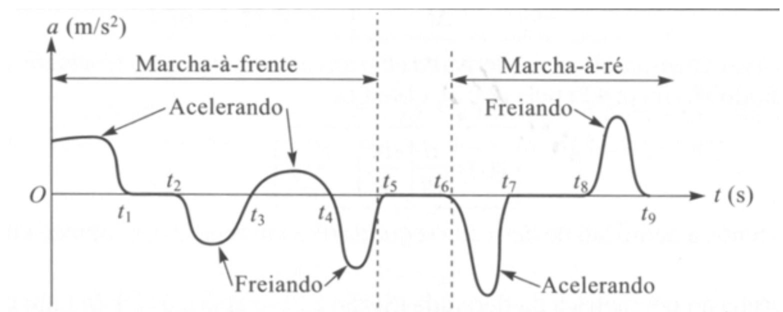



**Fig. 2.15** Aceleração em função do tempo

### *Problema inverso*

Aqui podemos também considerar o problema inverso, de determinar a variação da velocidade entre dois instantes, conhecendo $a(t)$. Assim,

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt$$

## *Seção 2.5 Movimento retilíneo uniformemente acelerado*

Um movimento retilíneo chama-se uniformemente acelerado quando a aceleração instantânea é constante (ou seja, independente do tempo). Da definição

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a = \text{ constante}$$

**Lei horária do movimento** Considerando o movimento num intervalo de tempo $[t_0, t]$, onde $t_0$ é o instante inicial e usando a técnica do problema inverso para a velocidade, encontra-se

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a\, dt = a(t - t_0)$$

que é a área do retângulo hachurado na Fig. 2.16.

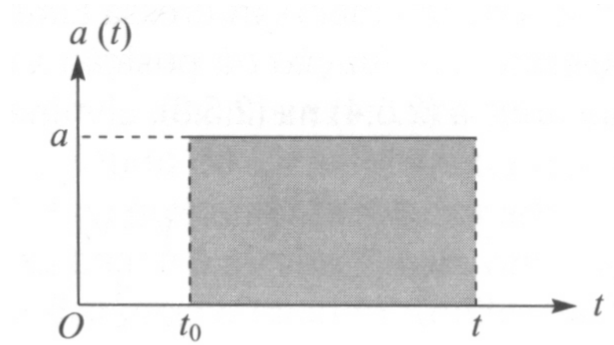



**Fig. 2.16** Integração da aceleração

O valor $v(t_0) = v_0$ da velocidade no instante incial chama-se velocidade incial. Então da equação

$$v(t) - v(t_0) = a(t - t_0)$$

encontra-se

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

Da definição de espaço percorrido, temos

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')\, dt'$$

onde chamamos de $t'$ a variável de integração para não confundir com $t$ o limite superior da integral. Esta área pode ser calculada pela área do trapézio definida na figura como a soma da área do retângulo sombreado, que é $v_0(t - t_0)$, com a área do triângulo sombreado, que é

$$\frac{1}{2}a(t - t_0)(t - t_0)$$

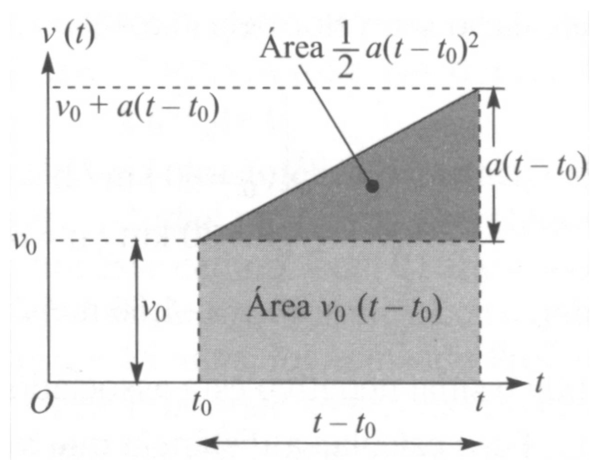



**Fig. 2.17** Integração da velocidade

Ou seja,

$$x(t) - x(t_0) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)(t - t_0)$$

ou ainda

$$x(t) - x(t_0) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Definindo a posição incial como $x(t_0) = x_0$, encontra-se finalmente a lei horária do movimento retilíneo uniformente acelerado,

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

em função dos valores inciais $x_0$ e $v_0$. Assim, o MRUA é completamente descrito pelo par de equações

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$
$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

Muitas vezes podemos eliminar $t - t_0$ dessas equações e obter uma equação alternativa a uma das duas anteriores. Fazendo isso, encontra-se

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

## *Seção 2.6 Galileu e a queda dos corpos*

Leia cuidadosamente esta seção